Chapitre 12

Droites et plans de l'espace

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

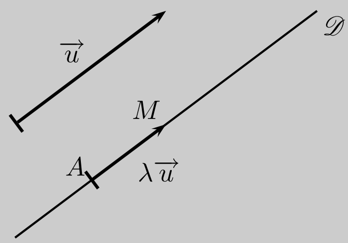
12.1 Droites de l'espace

Une droite de l'espace peut être définie :

- soit par deux points distincts ;
- soit par un point A et un vecteur non-nul $\overrightarrow{u}$.

a. Représentation paramétrique

Définition 1
Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point et $\overrightarrow{u}(a, b, c)$ un vecteur non nul.
La droite $\mathscr{D}$ passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u}$.



Conséquence immédiate : la droite $\mathscr{D}$ peut être représentée par un système paramétrique.

Propriété 1
Un point $M(x, y, z)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ si, et seulement si, il existe un réel t tel que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_A + at \\ y & = & y_A + bt \\ z & = & z_A + ct \end{array}\right.$$

Ce système s'appelle **représentation paramétrique** de la droite $\mathscr{D}$. Le paramètre est t.

b. Caractérisation barycentrique

Propriété 2
Soit A et B deux points distincts de l'espace.
La droite (AB) est l'ensemble de tous les barycentres du système $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ avec α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$.

C'est-à-dire un point $M \in (AB)$ si, et seulement si, il existe un couple de réels avec $\alpha + \beta \neq 0$ tel que M soit le barycentre de (A, α) et (B, β).

■ **Démonstration :**

Soit M un point de (AB), il existe alors un réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$.
On a $\overrightarrow{AM} = \lambda(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB})$ d'où $(1-\lambda)\overrightarrow{AM} + \lambda\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{0}$ de plus $(1-\lambda) + \lambda = 1 \neq 0$.
Le point M est le barycentre des points $(A, 1-\lambda)$ et (B, λ).
Réciproquement soit M le barycentre des points (A, α) et (B, β) avec $\alpha + \beta \neq 0$ on a $\alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{0}$ soit $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ donc $M \in (AB)$.

12.2 Plans de l'espace

Un plan de l'espace peut être défini :

- soit par trois points non alignés ;
- soit par un point et deux vecteurs non colinéaires ;
- soit par un point et un vecteur normal.

a. Représentation paramétrique

Propriété 3
Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}(a, b, c)$ et $\overrightarrow{v}(a', b', c')$ deux vecteurs non colinéaires.
Un point M appartient au plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, il existe λ et μ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$.

En passant au coordonnées on obtient une representation paramétrique du plan $\mathscr{P}$:

Un point $M(x, y, z) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow$ il existe deux réels λ et μ tels que $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_A + \lambda a + \mu a' \\ y & = & y_A + \lambda b + \mu b' \\ z & = & z_A + \lambda c + \mu c' \end{array}\right.$

b. Rappel : Équation cartésienne d'un plan

Un plan est entierement déterminer par la donnée d'un point et d'un vecteur normal.

Propriété 4
Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a, b, c)$.
Un point M appartient au plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{n}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.

En passant au coordonnées dans un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ on obtient une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$:
Un point $M(x, y, z) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow$ il existe $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ soit $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

c. Caractérisation barycentrique

Propriété 5
Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace.
Le plan (ABC) est l'ensemble de tous les barycentres du système $\{(A, \alpha) ; (B, \beta) ; (C, \gamma)\}$ avec α, β et γ trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

C'est-à-dire un point $M \in (ABC)$ si, et seulement si, il existe un triplet de réels avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ tel que M soit le barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ).