Chapitre 14

Dénombrements - lois de probabilité

14.1 Dénombrements

a. Permutations

Définition 1
Soit n un entier naturel non nul. Le nombre $n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ est appelé **factorielle n**. On note

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

par Convention, $0! = 1$.

Théorème 1
Le nombre de **permutations** d'un ensemble contenant n éléments est $n!$.

Exemples :

- Il y a 28 chaises dans une salle pour 28 élèves. *Dénombrer* toutes les manières possibles pour les élèves d'occuper les chaises de la salle.
- Combien y a-t-il d'annagrammes du mot ZOÉ ?

b. Combinaisons

Définition 2
Soit n et p deux entiers naturels et E un ensemble contenant n éléments. Un sous-ensemble de E contenant p éléments est appelé une **combinaison** de p éléments de E ou encore une ***p*-combinaison** d'éléments de E.

Définition 3
Le nombre de p-combinaisons d'un ensemble contenant n éléments est noté $\binom{n}{p}$ ou encore C_n^p

Propriété 1

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(p-1))}{p!}$$

Théorème 2

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

14.2 Triangle de Pascal - Binôme de Newton

a. Raisonnement calculatoire

À l'aide des formules précédentes, établissez que

Propriété 2

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Établissez, toujours par le calcul, la relation suivante, dite **Relation de Pascal** même si les mathématiciens chinois l'avaient mise en évidence avant lui

Propriété 3

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

b. Formule du binôme de Newton

Sir Isaac n'a pas fait que dormir sous un pommier. Il a par exemple établi que

Théorème 3
Soit a et b des nombres complexes et n un entier naturel non nul, alors

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p} = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

On peut prouver cette formule par récurrence en remarquant que $(a+b)^{k+1} = a(a+b)^k + b(a+b)^k$ et en utilisant la relation de Pascal au bon moment.

Cette formule nous permet donc d'obtenir de nouveaux « produits remarquables », à conditions de connaître les coefficients binomiaux.
Testez la formule aux rangs 2, 3, 4, 5. Disposez vos résultats dans un tableau en n'écrivant que les coefficients et conjecturer le triangle de Pascal...

14.3 Loi binomiale

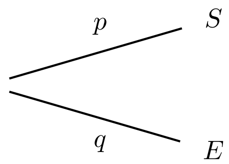
a. Rappels

Définition 4
On appelle variable aléatoire toute fonction de Ω dans $\mathbb{R}$
Si l'image de Ω par X est un ensemble de valeurs isolées de $\mathbb{R}$ on dit que la variable X est discrète.

Définition 5
- L'espérance mathématique ou moyenne d'une variable aléatoire discrète prenant n valeurs x_i avec les probabilités $P(X = i) = p_i$ avec $1 \leq i \leq n$ est le réel
$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$
- La variance de X : $V(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - E(x))^2 \times p_i$ ou $V(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \times p_i - (E(X))^2$.
- Écart type de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

b. Épreuve de Bernouilli

Définition 6
Lorsqu'une expérience aléatoire n'a que deux issues appelées succès et échec, on la nomme épreuve de Bernouilli.
On note p la probabilité du succès et $q = 1 - p$ la probabilité de l'échec.



Définir une loi de Bernoulli de paramètre p, c'est associer à l'expérience aléatoire une loi de probabilité discrète définie par :

x_i	S	E
p_i	p	q

c. Loi binomiale

Lors de la répétition de n épreuves de Bernouilli, **identiques et indépendantes**, on s'intéresse à la variable aléatoire X qui à chaque expérience aléatoire associe le nombre de succès.
On obtient comme univers ensemble des résultats possibles les entiers k compris entre 0 et n ($E = \{0; 1; 2; \ldots; n\}$).
On cherche à déterminer la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X sur l'univers E

Définition 7
Cette loi de probabilité sur cet ensemble E est nommée loi binomiale de paramètres n et p, notée $\mathscr{B}(n; p)$ où p est la probabilité de succès et n le nombre d'épreuves.
$P(X = k)$, la probabilité d'obtenir une liste de k succès et $n - k$ échecs est $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

$X =$	0	1	2	$\ldots$	k	n
Probabilité p_i	q^n	$\binom{n}{1} pq^{n-1}$	$\binom{n}{2} p^2 q^{n-2}$		$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	p^n

Propriété 4
On a l'espérance de X : $E(X) = np$ et l'écart type de X : $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

d. Exemple

Diabète insulino-dépendant dit de type 1.

Une étude de l'OMS affirme que 2,8% de la population mondiale est atteinte de diabète de Type 1. Dans un lycée, on interroge au hasard $N = 10$ élèves pour vérifier s'ils souffrent ou non de diabète de type 1. Le nombre d'élèves est suffisament important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On considère la variable aléatoire X qui à chaque tirage de N élèves associe le nombre d'élèves souffrant de diabète de type 1.

1. Justifier que la loi X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu' un élève exactement, souffre de diabète de type 1.
3. Calculer la probabilité qu'un élève au moins, souffre de diabète de type 1.

Correction

1. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $\mathcal{B}(N, 2, 8\%)$ car :
- X comptabilise le nombre de personnes diabétiques ;
- deux issues contraires, pas diabétiques ou pas $p = 2,8\%$ et $q = 97,2\%$;
- on répéte N fois la même expérience aléatoire ;
- les expériences sont indépendantes car le tirage est assimilé à un tirage avec remise.

2. $P(x = 1) = \binom{10}{1} \times 0,028^1 \times 0,972^9 \approx 0,22$
3. $P(X \geq 1) = 1 - P(Y = 0) \approx 0,25$

▶ Exercice 1

Un petit artisan emploie trois ouvriers, la probabilité pour que l'un d'entre eux soit absent un jour donné est de 0,05. On suppose que les trois ouvriers s'absentent indépendamment les uns des autres. Soit X la variable aléatoire qui à une journée associe le nombre d'ouvriers absents.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Donner la loi de probabilité de X.
3. Calculer la probabilité d'avoir au moins un ouvrier présent.

▶ Exercice 2

Un tireur à la carabine touche le centre de la cible avec une probabilité égale à 0,7.

1. Quelle est la probabilité pour que sur 5 tirs il touche au moins une fois le centre de la cible ?
2. Combien de tirs doit-il effectuer pour que la probabilité d'atteindre la cible soit supérieur à 0,95 ?

▶ Exercice 3

Une machine produit, en grande série, des objets de masse théorique 180 grammes. Un objet est conforme si sa masse est comprise entre 178 g et 182 g. On admet que $96,8\%$ des objets de la production sont conformes. Les objets sont stockés par boîtes de vingt. On désigne par Y la variable aléatoire qui associe à une boîte prise au hasard le nombre d'objets conformes de cette boîte.

1. Donner les paramètres de la loi binomiale suivie par Y.
2. On choisit une boîte au hasard dans la production. Calculer la probabilité des événements suivants :
- tous les objets sont conformes ;
- au moins dix-huit objets sont conformes.

14.4 Exercices

▶ Exercice 4 Coefficients binomiaux

1. Donnez une expression simple de $\binom{n}{0}$, de $\binom{n}{1}$, de $\binom{n}{n}$, de $\binom{n}{n-1}$. Utilisez des simplifications pour calculer à la main $\binom{20}{3}$.

2. On donne $\binom{13}{5} = 1287$ et $\binom{13}{6} = 1716$. Calculez alors à la main $\binom{13}{8}$ et $\binom{14}{9}$

▶ Exercice 5 Une vieille connaissance

Donnez une nouvelle démonstration très rapide de la formule bien connue : $(1+x)^n > 1 + nx$

▶ Exercice 6 Nombre de parties

Combien y a-t-il de parties d'un ensemble ayant n éléments ?

▶ Exercice 7 Type Bac avec ROC

1. Démonstration de cours. Démontrer que, pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \leqslant k < n$, on a :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

2. En déduire que pour tous entiers naturels n et k tels que $2 \leqslant k < n-1$, on a :

$$\binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} = \binom{n}{k}.$$

3. On considère deux entiers naturels n et k tels que $2 \leqslant k < n-1$. On dispose d'une urne contenant n boules indiscernables au toucher. Deux des boules sont rouges, les autres sont blanches.
On tire au hasard et simultanément k boules de l'urne. On appelle A l'évènement « au moins une boule rouge a été tirée ».

a) Exprimer en fonction de n et de k la probabilité de l'évènement $\overline{\mathrm{A}}$, contraire de A.
En déduire la probabilité de A.

b) Exprimer d'une autre manière la probabilité de l'évènement A et montrer, à l'aide la formule obtenue à la question **2.**, que l'on retrouve le même résultat.

▶ Exercice 8

Calulez $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin^5 t \,\mathrm{d}t$

▶ Exercice 9

Périclès est goutteur d'olives dans une usine grecque. Un matin, il goutte cent olives au hasard et les replace dans le réservoir.

L'après-midi, l'ouzo de l'apéritif lui a fait perdre la mémoire. Il goutte à nouveau cent olives dans le même réservoir. Douze d'entre elles avaient déjà été machées.
On note A l'événement « il y a douze olives machées parmi les cent choisies » et B_n l'événement « il y a n olives dans le réservoir ».
On considère la fonction f définie pour les entiers supérieurs à cent par

$$f(n) = p_{B_n}(A)$$

et la suite (u_n) définie pour les entiers supérieurs à 100 par

$$u_n = f(n+1)/f(n)$$

1. Comparez u_n à 1.

$$u_n = \frac{\binom{100}{12}\binom{n-100}{88}\binom{n+1}{100}}{\binom{100}{12}\binom{n-99}{88}\binom{n}{100}}$$

2. Montrez que la fonction f atteint un maximum sur $[\![100, +\infty[\![$.

3. On appelle *maximum de vraissemblance* m la valeur de n correspondant à ce maximum. Déterminez m.

Réponse : $m = 833$

▶ Exercice 10 Le poker

Une main au poker est constituée de 5 cartes tirées d'un jeu de 52 cartes. Combien y a-t-il de mains contenant des carrés (XXXXY) ? des fulls (XXXYY) ? des brelans (XXXYZ) ? des doubles paires (XXYYZ) ? des paires (XXYZA) ?
Deux lettres identiques (par exemple XX) correspondent à deux cartes de même hauteur (par exemple deux dames).

Réponse : 624 carrés, 3744 fulls, 54 912 *brelans*

123 552 *doubles paires,* 1 098 240 *paires.*

▶ Exercice 11 L'âge du capitaine

Le capitaine des pompiers de New-York réside à l'angle de la $7^{\text{ème}}$ rue et de la $33^{\text{ème}}$ avenue. La caserne se trouve à l'angle de la $15^{\text{ème}}$ rue et de la $40^{\text{ème}}$ avenue. Il s'y rend tous les jours à pied et sans perdre de temps (i.e. dans le sens des numéros croissants aussi bien pour les rues que pour les avenues). Sachant qu'il a commencé à travailler le jour de ses 18 ans, et sachant qu'il n'est jamais passé deux fois par le même chemin, quel est l'âge maximum du capitaine ?

Réponse : maximum 35 ans.

▶ Exercice 12 Calcul de coefficients binomiaux

On considère 7 boules numérotées de 1 à 7.

1. On en tire simultanément 3. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

2. Soit k un entier vérifiant $3 \leqslant k \leqslant 7$. Combien y a-t-il de tirages de 3 boules dont le plus grand numéro est k ?

3. En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{k=3}^{7} \binom{x-1}{2}$ sous forme d'un unique coefficient binomial.