Chapitre 15

Transformations dans $\mathbb{C}$

15.1 Écriture complexe d'une transformation

Soit T la transformation du plan complexe, qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' et f sa fonction associée de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
On a $M' = T(M)$ avec $z' = f(z)$ appelé **l'écriture complexe de la transformation T**.

15.2 Écriture complexe d'une translation

Propriété 1 (translation)
Soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur d'affixe b, l'écriture complexe de la translation de vecteur $\overrightarrow{w}$ est $z' = z + b$

15.3 Écriture complexe d'une homothétie

Propriété 2 (homothétie)
Soit Ω un point d'affixe ω et k un réel non nul, l'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω et de rapport k est $z' - \omega = k(z - \omega)$.

■ **Démonstration :**

Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport k non nul, on a pour tout point M d'affixe z
$M' = h(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega)$

15.4 Écriture complexe d'une rotation

Dans le plan complexe muni d'un repère $\left(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ orienté.

Propriété 3 (rotation)
Soit Ω un point d'affixe ω et θ un réel. L'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ est $z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega)$.

■ **Démonstration :**

Soit r la rotation de centre Ω et d'angle rapport θ , on a pour tout point $M \neq \Omega$ d'affixe z $M' = r(M) \Leftrightarrow \Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$ c'est-à-dire $|z' - \omega| = |z - \omega|$ et $\arg(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}) = \theta$ ce qui signifie que le nombre complexe $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}$ a pour module 1 et pour argument θ on a donc $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \Leftrightarrow z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega)$.