Chapitre 16

Fonctions exponentielle de base a

Soit a un réel strictement positif, et n un entier relatif. On sait que $\ln(a^n) = n \ln a$ donc $a^n = e^{b \ln a}$. On décide alors de généraliser aux réels b.

16.1 Définition

Définition 1
Soit a un réel strictement positif, pour tout réel b, on pose $a^b = e^{b \ln a}$.

Exemples :
$2^{1,5} = \exp(1,5 \ln 2) \approx 2,83$ $\quad$ $3^{\pi} = \exp(\pi \ln 3) \approx 31,54$

Propriété 1 (règles de calculs)
Pour tous les réels a et a' strictement positifs et pour tous réels b et b', on a :

$$\bullet \ln(a^b) = b \ln a \quad \bullet a^{b+b'} = a^b a^{b'} \quad \bullet a^{b-b'} = \frac{a^b}{a^{b'}}$$
$$\bullet (a^b)^{b'} = a^{bb'} \quad \bullet (aa')^b = a^b a'^b \quad \bullet \left(\frac{a}{a'}\right)^b = \frac{a^b}{a'^b}$$

16.2 Racine n-ième d'un réel positif

Définition 2 (et propriété)
Pour tout réel strictement positif a et tout entier naturel non nul n, il existe un unique réel positif b tel que $b^n = a$
Le réel b est noté $\sqrt[n]{a}$ et s'appelle la racine n-ième du réel positif a. On a :

$$\sqrt[n]{0} = 0 \quad \text{et, pour } a > 0\ , \ \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

16.3 Fonction exponentielle de base a

Définition 3
Soit a un réel strictement positif et différent de 1.
La fonction $x \longmapsto a^x$ définie sur $\mathbb{R}$ s'appelle fonction exponentielle de base a.
Pour tout réel x, $f_a(x) = e^{x \ln a}$ est de la forme e^u, avec $u\ : \longmapsto x \ln a$, donc f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_a(x) = (\ln a)e^{x \ln a}$.

Propriété 2 :
Pour tout réel x, $a^x > 0$ on a donc

- si $0 < a < 1$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
a^x	$+\infty$	1	0

- si $a > 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
a^x	$-\infty$	1	$+\infty$

Exemples :