Chapitre 17

Lois de probabilité continues

17.1 Lois de probabilité continues

a. Position du problème

On considère des expériences aléatoires dont l'issue est un **réel**. Ce réel sera la valeur prise par la variable aléatoire X.
Lorsque la variable aléatoire réelle prend des valeurs de tout un intervalle I de $\mathbb{R}$, on dit que la loi de probabilité de **cette variable aléatoire est continue.**
Les probabilités d'évènements à évaluer sont donc de la forme $X < a$ ou $X > a$ ou $X \leqslant a$ ou $X \geqslant a$ où a est un réel, c'est-à-dire d'une façon générale, d'évènements de la forme $X \in J$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.

b. Intégrales à borne infinies

Définition 1
Soit a un réel et f une fonction qui admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
On pose :

1. $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt$ (sous réserve que cette limite existe)

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)dt = \lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)dt$ (sous réserve que cette limite existe)

3. Pour tout réel a, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt + \int_a^{+\infty} f(t)dt$.

c. Généralités

Définition 2
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dit que f est une densité de probabilité lorsqu'elle vérifie les conditions suivantes :

(i) f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellment en quelques valeurs.

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$.

(iii) , $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.

Définition 3
La fonction de répartition d'une variable aléatoire X qui suit une loi à densité continue f est la fonction F :

$$F \quad : \mathbb{R} \longrightarrow [0;1]$$
$$x \longmapsto F(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Propriété 1
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi à densité continue f. La fonction de répartition F de X est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$. De plus F est dérivable en tout réel x où f est continue , avec $F'(x) = f(x)$.

Propriété 2
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi à densité continue f et a, b deux réels tels que $a \leqslant b$.

1. $P(X = a) = 0$.

2. $P(X < a) = P(X \leqslant a) = F(a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)dt$.

3. $P(X > b) = P(X \geqslant b) = \displaystyle\int_{b}^{+\infty} f(t)dt$.

4. $P(X > b) = P(X \geqslant b) = 1 - P(X \leqslant b) = 1 - F(b)$.

5. $P(a < X < b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a) = \displaystyle\int_{a}^{b} f(t)dt$.

17.2 Exemples de lois continues

a. Loi uniforme continue

Propriété 3
Soit a et b deux réels tels que $a < b$.La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a;b] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.

Définition 4
Soit a et b deux réels tels que $a < b$, et X une variable aléatoire.
On dit que X suit **la loi uniforme sur** $[a;b]$ lorsque X suit la loi à densité continue f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a;b] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Exemple
Choisir un réel au hasard dans $[a;b]$ se modélise par la loi uniforme sur $[a;b]$, c'est-à-dire que si on appelle X la variable aléatoire qui représente le réel choisi au hasard dans $[a;b]$, alors X suit la loi uniforme sur $[a;b]$.

b. Loi exponentielle ou de durée de vie sans vieillissement

Propriété 4
Soit λ un réel strictement positif.

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \text{ si } x \in [0; +\infty[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.

Définition 5
Soit λ un réel strictement positif et X une variable aléatoire réelle.
On dit que X suit la loi exponentielle de paramètre λ lorsque X est à valeurs dans $[0; +\infty[$ et suit la loi à densité continue f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \text{ si } x \in [0; +\infty[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Théorème 1
La fonction de répartition d'une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = P(X < x) = \int_0^x f(t)dt = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \text{ si } x \in [0; +\infty[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

.

Définition 6
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[0; +\infty[$ qui suit une loi à densité continue. On dit que X suit une loi de durée de vie sans vieillissement ou sans mémoire lorsque : pour tous réels t et h strictement positifs tels que $P(X > t) \neq 0$, $P_{X<t}(X > t + h) = P(X > h)$.

Propriété 5
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi à densité continue.
Les propriétés suivantes sont équivalentes

1. X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

2. X suit une loi de durée de vie sans vieillissement.

17.3 Adéquation à loi équirépartie

cf activité en module info.

17.4 Statistiques et simulation

cf activité en module info.