Chapitre 18

Équations différentielles linéaires du premier ordre

a. Position du problème

Soit a, b deux réels données, avec $a \neq 0$. On cherche à determiner les fonctions y dérivables sur $\mathbb{R}$, solutions pour tout x de $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ y' = ay + b$$

b. Forme des solutions

Théorème 1
Soit a, b deux réels données, avec $a \neq 0$ et (E) l'équation différentielle $y' = ay + b$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto -\dfrac{b}{a} + k\mathrm{e}^{ax}$ avec k une contante réelle.

■ **Démonstration :**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{b}{a} + k\mathrm{e}^{ax}$, on a pour tout x de $\mathbb{R}$:

$f'(x) = a \times k\mathrm{e}^{ax} = a \times k\mathrm{e}^{ax} - b + b = a(-\dfrac{b}{a} + k\mathrm{e}^{ax}) + b = af(x) + b$
on en déduit que f est une solution de (E).
Réciproquement :
y est une fonction constante solution de $(E) \Leftrightarrow 0 = ay + b$ d'où $y = -\dfrac{b}{a}$.
Ainsi l'unique fonction constante de solution de (E) est $f_0\ :\ x \longmapsto -\dfrac{b}{a}$.
Soit g une solution de (E), on a pour tout x de $\mathbb{R}$, $g'(x) = ag(x) + b$.
Or $(g - f_0)' = g' - {f'}_0 = ag + b - af_0 - b = a(g - f_0)$, d'après la chapitre 1 comme $(g - f_0)' = a(g - f_0)$ il existe une constante k telle que pour tout x de $\mathbb{R}$, $(g - f_0)(x) = k\mathrm{e}^{ax}$ ainsi $g(x) = -\dfrac{b}{a} + k\mathrm{e}^{ax}$.

c. Solution avec condition initiale

Théorème 2
Soit a, b deux réels données, avec $a \neq 0$ et (E) l'équation différentielle $y' = ay + b$.
Pour tout couple $(x_0; y_0)$ de réels, l'équation (E) admet une unique solution f définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f(x_0) = y_0$.

d. Exemple détaillé

▶ Exercice 1

On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

$$(E)\ :\ 2y' + 3y = 6.$$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E).

2. Déterminer l'unique solution g de (E) vérifiant $g(-1) = 0$.

Corrigé

1. L'équation peut s'écrire $y' = -\dfrac{3}{2}y + 3$, les solutions sont les fonctions f de la forme $f\ :\ x \mapsto 2 + k\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}$ avec k une contante réelle.

2. Dire que g est une solution de (E) signifie qu'il existe un réel k tel que :
pour tout x réel, $g(x) = 2 + k\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}$ or $g(-1) = 0$ d'où $0 = 2 + k\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$ soit $k = -2\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$ on a alors $g(x) = 2 - 2\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}(x+1)}$.

e. Objectif Bac

▶ Exercice 2 Antilles-Guyane 2008

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3\mathrm{e}^{-3x}$ et Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 3\mathrm{e}^{-3x}.$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E$'$) : $y' + 2y = 0$.

2. En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x}$ est solution de (E$'$).

3. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3\mathrm{e}^{-3x}$ est solution de l'équation (E).

4. En remarquant que $f = g + h$, montrer que f est une solution de (E).

Corrigé

1. (E')$\iff y' = -2y$. D'après le cours, les solutions de (E') sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto C\mathrm{e}^{-2x}$, où C est une constante réelle.

2. En particulier, avec $C = \dfrac{9}{2}$, on obtient la fonction h.

3. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 9\mathrm{e}^{-3x}$. Par conséquent, pour tout réel x :

$$g'(x) + 2g(x) = 9\mathrm{e}^{-3x} - 6\mathrm{e}^{-3x} = 3\mathrm{e}^{-3x},$$

ce qui prouve que g est bien solution de (E).

4. Comme $f = g + h$, on a $f' = g' + h'$, donc, pour tout réel x :

$$f'(x) + 2f(x) = \underbrace{g'(x) + 2g(x)}_{3\mathrm{e}^{-3x}} + \underbrace{h'(x) + 2h(x)}_{0} = 3\mathrm{e}^{-3x},$$

et f est alors bien solution de (E).

▶ Exercice 3

Soit l'équation différentielle (E_1) : $y' - 2y = 1 - 32x$.

1. Montrer qu'il existe une fonction affine h solution de cette équation.

2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, montrer que f est une solution de (E_1) si et seulement, si $f - h$ est une solution de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$.

3. En Déduire les solutions de (E_1).