Chapitre 1

Fonction exponentielle

1.1 Équation différentielle

a. Méthode d'Euler, construction du graphe d'une solution approchée

Dans de nombreux problèmes, on est amené à déterminer une fonction proportionnelle à sa dérivée : désintégration des noyaux des atomes d'un corps radioactif, datation au carbone 14, évolution d'une population où la croissance est proportionnelle au nombre d'habitants, etc.
On s'intéresse donc à *l'équation différentielle* $f' = k\,f$, avec k un réel non-nul. Le problème est de trouver une fonction la satisfaisant.
Avec $k = 1$, on recherche une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout x, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.
En prenant un pas suffisamment petit, la méthode d'Euler permet d'obtenir la courbe d'une fonction affine par morceaux proche de celle d'une solution.

b. Fonction exponentielle

Propriété 1 (Résultat préliminaire.)
Si, pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$, alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

■ **Démonstration :**

Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = f(x) \times f(-x)$. La fonction ϕ est dérivable et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$
$\phi(x) = f(x) \times f(-x)$
$\phi'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times [-f'(-x)]$
$\phi'(x) = f'(x) \times f(-x) - f(x) \times f'(-x)$
$\phi'(x) = 0.$
La fonction ϕ est constante sur $\mathbb{R}$, or $\phi(0) = f(0) \times f(0) = 1$, donc pour tout réel x, $\phi(x) = 1$.
D'où $f(x) \times f(-x) = 1$, et finalement pour tout réel x, $f(x) \neq 0$.

Remarque : on en déduit aussi que pour tout réel x, $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

Théorème 1
Il existe une unique fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** et est notée **exp**.

■ **Démonstration :**

• **Existence**
L'existence de la fonction exponentielle est pour l'instant admise. La méthode d'Euler permet d'obtenir la courbe d'une fonction affine par morceaux proche de celle de l'exponentielle.

• Unicité

Si g est une fonction telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$, la fonction $h = \dfrac{g}{f}$ est définie (car f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, cf. prop.1) et est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $h' = \dfrac{g'f - gf'}{f^2}$ or $f' = f$ et $g' = g$, d'où $h' = 0$ et donc h est constante sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $h(x) = h(0) = 1$ c'est-à-dire $g(x) = f(x)$ et donc $f = g$.

Théorème 2
Soit k un réel donné.
Il existe une unique fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f' = kf$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \exp(kx)$.

■ **Démonstration :**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \exp(kx)$ avec k réel donné.
On a $f(0) = \exp(0) = 1$ de plus pour tout réel x on a $f'(x) = k\exp(kx) = kf(x)$. La fonction f est bien une solution de l'équation différentielle $f' = kf$ avec $f(0) = 1$.
• Unicité
Si g est une fonction telle que $g' = kg$ et $g(0) = 1$, comme la fonction exponentielle ne s'annule pas, on peut définir pour tout réel x, la fonction $\phi(x) = \dfrac{g(x)}{\exp(kx)}$.
La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\phi'(x) = \frac{g'(x)\exp(kx) - kg(x)\exp(kx)}{\exp(kx)^2}$$

$$\phi'(x) = \frac{kg(x) - kg(x)}{\exp(kx)}$$

$$\phi'(x) = 0.$$

La fonction ϕ est constante sur $\mathbb{R}$, or $\phi(0) = \dfrac{g(0)}{\exp(0)} = 1$.

On en déduit que pour tout réel x, $\phi(x) = 1$ soit $\dfrac{g(x)}{\exp(kx)} = 1$ et donc $g(x) = \exp(kx)$

Théorème 3
Soit f une fonction non-nulle et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :
(1) Pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) \times f(y)$.
(2) Il existe un réel k tel que pour tout réel x, $f(x) = exp(kx)$.

■ **Démonstration :**

Prop. (1)⇒Prop. (2)
Soit f une fonction non-nulle dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) \times f(y)$

1. Montrer que $f(0) = 1$
2. Soit y un réel fixé et ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = f(x+y) = f(x)f(y)$.
Montrer que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\phi'(x)$.
3. Calculer $\phi'(0)$ et déduire que pour tout réels y, $f'(y) = kf(y)$ avec k un réel à déterminer.
4. Conclure que pour tous réels x et y, $f(x) = \exp(kx) \times f(y)$ (2)

Prop. (2)⇒Prop.(1)
Soit f une fonction non-nulle et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe un réel k tel que pour tout réel x, $f(x) = exp(kx)$.

1. Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = kf(x)$.
2. Soit y un réel fixé et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x+y)f(-x)$
Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$.
3. Calculer $g(0)$ et déduire que pour tous x et y réels, $f(x+y)\,f(-x) = f(y)$.
4. Conclure que pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ (1)

1.2 Propriétés

Les théorèmes précedents ont pour conséquences :

Propriété 2

1. $\exp(0) = 1$

2. La fonction exp est dérivable pour tout réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$

3. Pour tout réel x, $\exp(x) > 0$

4. La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

5. Pour tous réels a et b $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$

6. Pour tous réels a et b $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$

7. $\exp(-b) = \dfrac{1}{\exp(b)}$

8. $\exp(ka) = [\exp(a)]^k$, avec $k \in \mathbb{Z}$

9. $\exp\left(\dfrac{a}{n}\right) = [\exp(a)]^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\exp(a)}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$

1.3 Le nombre e et la notation e^x

On pose $\mathrm{e} = \exp(1)$ on a obtenu grâce à la méthode d'Euler une approximation de e, car $e = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

$$\mathrm{e} \approx 2,71828182845904523536$$

et que pour tout entier k,

$$\exp(k) = \exp(k \times 1) = (\exp(1))^k = e^k$$

on note alors, **par convention**, que

$$\exp(x) = e^x$$

Il a reste à vérifier que les propriétés vues précédemment sont conformes à l'usage de la notation puissance.

Propriété 3

Pour tous réels x, y et entier relatif n :

- $\mathrm{e}^0 = 1$
- $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$
- $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$
- $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$
- $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$

1.4 Étude de la fonction exponentielle

a. Limites en $-\infty$ et $+\infty$

Propriété 4

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

■ **Démonstration :**

1. Étudier la fonction $f : x \mapsto e^x - x$ et en déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

2. Utiliser $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ pour en déduire que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

b. Sens de variation et représentation graphique

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et sa courbe representative $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale.

x	$-\infty$		$+\infty$
exp			$+\infty$
		$\nearrow$	
	0