Chapitre 2

Suites et principe de récurrence

2.1 Définitions et vocabulaire

Définition 1
Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$.

$$u : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto U(n) \end{array}$$

Remarques

- L'image par u de l'entier n, $u(n)$ est aussi notée u_n qui se lit « u indice n ».
- On dit que u_n est le terme de rang n.
- Le terme suivant u_n est u_{n+1}, le terme précédant u_n est u_{n-1} (avec $n \geq 1$).

Définition 2
Dire d'une suite u est qu'elle est croissante (respectivement décroissante) signifie que pour tout entier n
$u_n \leq u_{n+1}$ (respectivement $u_n \geq u_{n+1}$).

Méthodes : Pour étudier le sens de variation d'une suite u on pourra :

- étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$;
- lorsque pour tout entier n, u_n est non-nul et de signe constant on peut comparer le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 ;
- si pour tout entier n on a $u_n = f(n)$ avec f une fonction définie et monotone sur $[0; +\infty[$ alors la suite u et la fonction f ont la même monotonie.

Remarque
Il existe des suites ni croissantes ni décroissantes, par exemple la suite u définie pour tout entier n par $u_n = (-1)^n$.
Le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ n'est pas constant donc la suite u n'est ni croissante ni décroissante.

Définition 3
Dire d'une suite u est qu'elle est majorée (respectivement minorée) signifie qu'il existe un réel M (respectivement m) tel que pour tout entier n, $u_n \leq M$ (respectivement $u_n \geq m$).
Dire d'une suite u est qu'elle est bornée signifie qu'elle est minorée et majorée c'est-à-dire il existe un réel m et un réel M tels que pour tout entier n, $m \leq u_n \leq M$.

2.2 Suite arithmétique

a. Définition

Définition 4

- Lorsqu'on obtient chaque terme d'une suite en ajoutant au terme précédent toujours le même réel, appelé raison, la suite est une suite arithmétique.
- la suite u est une suite arithmétique de raison r, signifie que pour tout entier n, on a $u_{n+1} = u_n + r$.

b. Calcul du terme de rang n

Théorème 1

Le terme de rang n d'une suite arithmétique u de premier terme u_1 et de raison r est $u_n = u_1 + (n-1)r$.
Si le premier terme est u_0 alors le terme de rang n est : $u_n = u_0 + nr$.
Si le premier terme est u_p alors le terme de rang n est : $u_n = u_p + (n-p)r$.

Exemple : soit la suite arithmétique de premier terme $u_1 = 12$ et de raison 3.
Le terme de rang 50 $u_{50} = u_1 + (50-1) \times r = 12 + 49 \times 3 = 159$.

c. Somme des n premiers termes

Théorème 2

La somme des n premiers termes consécutifs d'une suite arithmétique u de premier terme u_1 est :

$$S_n = u_1 + u_2 \ldots + u_{n-1} + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}.$$

On généralise la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique
Somme $= \dfrac{\text{nombres de termes} \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$

Variations d'une suite arithmétique

Propriété 1

Soit u une suite arithmétique de raison r.

- $r > 0 \Longleftrightarrow u$ est croissante ;
- $r < 0 \Longleftrightarrow u$ est décroissante ;
- $r = 0 \Longleftrightarrow u$ est constante.

2.3 Suite géométrique

a. Définition

Définition 5

- Lorsqu'on obtient chaque terme d'une suite en multipliant le terme précédent par le même réel, appelé raison, la suite est une suite géométrique.
- la suite u est une suite géométrique de raison q, signifie que pour tout entier n, on a $u_{n+1} = q \times u_n$.

b. Calcul du terme de rang n

Théorème 3
Le terme de rang n d'une suite géométrique u de premier terme u_1 et de raison q est $u_n = q^{n-1} \times u_1$.
Si le premier terme est u_0 alors le terme de rang n est $u_n = q^n \times u_0$.
Si le premier terme est u_p alors le terme de rang n est $u_n = q^{n-p} \times u_p$.

Exemple : soit u une suite géométrique de premier terme $u_1 = 100$ et de raison 3.
On a $u_{10} = 3^9 \times 100 = 1968300$

c. Somme des n premiers termes

Théorème 4
La somme des n premiers termes consécutifs d'une suite géométrique u de premier terme u_1 et de raison $q \neq 1$ est

$$S_n = u_1 + u_2 \ldots + u_{n-1} + u_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

On généralise la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique
Somme $= premier\ terme \times \dfrac{1-q^{nbtermes}}{1-q}$

2.4 Raisonnement par récurrence

Soit P_n une proposition relative à l'entier n et n_0 un entier.

Axiome 1 (Principe de récurrence où cinquième axiome de Peano)
Initialisation : si la propostion P_{n_0} est vraie,
Hérédité : et si pour tout $k \geq n_0$, la propsition P_k vraie implique que la propsition P_{k+1} soit vraie
alors la proposition P_n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemple Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \in N^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.