# Chapitre 3

# Nombres Complexes - Forme algébrique

## 3.1 Motivations

Étant donné que certaines équations polynomiales à coefficients réels n'ont pas toujours de solution, on cherche à construire un nouvel ensemble de nombres :

- contenant tous les nombres réels,
- muni de deux opérations prologeant l'addition et la multiplication des nombres réels et ayant les mêmes règles de calculs,
- contenant un élément noté i tel que $i^2 = -1$,
- tout nombre $z$ s'écrive de manière unique $z = a + ib$ où $a$ et $b$ sont des réels.

Un tel ensemble existe, il s'agit de l'ensemble des nombres complexes noté $\mathbb{C}$.

## 3.2 Vocabulaire et premières propriétés

**Définition 1**
Un nombre complexe est un nombre de la forme $a + ib$, où $a$ et $b$ sont deux réels et $i$ et le nouveau nombre tel que $i^2 = -1$.

**Théorème 1 ( L'ensemble $\mathbb{C}$ )**
On définit un ensemble $\mathbb{C}$

- muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$
- contenant un nombre $i$ vérifiant $i^2 = -1$
- tel que chaque élément $z$ de $\mathbb{C}$ peut s'écrire de manière **unique** sous la forme

$$z = a + ib \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ des nombres réels}$$

**Définition 2**
Soit $z = a + ib$ et $z' = c + id$ deux nombres complexes on définit les deux opérations suivantes :

- l'addition :
  $z + z' = (a + c) + i(b + d)$
- la multiplication $z \times z' = (ac - bd) + i(ad + bc)$

On vérifie que ces deux opérations sont associatives, communatives que la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

**Définition 3**
Cette écriture $z = a + ib$ unique est appelée **forme algébrique** du réel $z$.
Le nombre réel $a$ est appellé **partie réelle** de $z$ et notée $\mathcal{R}e(z)$
Le nombre rél $b$ est appellé **partie imaginaire** de $z$ et notée $\mathcal{I}m(z)$

## 3.3 Conjugué d'un complexe

**Définition 1 Conjugué**
On appelle conjugué du nombre complexe $z = a + ib$ le nombre

$$\overline{z} = a - ib$$

Prouver les propriétés immédiates suivantes

**Propriété1 Propriétés des conjugués**

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow z = -\overline{z}$
- $\mathcal{R}e(z) = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$
- $\mathcal{I}m(z) = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z})$
- Si $z = a + ib$, alors $z\overline{z} = a^2 + b^2$

**Méthodes :**

**Montrer qu'un complexe est un réel**

En effet, si on arrive à montrer que $\overline{z} = z$, alors on en conclut que $z$ est réel.

**Rendre réel des dénominateurs pour obtenir des formes algébriques**

En effet,

$$z \cdot \overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$$

Ainsi, pour obtenir la forme algébrique de l'inverse de $2 + i$,

$$\frac{1}{2+i} = \frac{1}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} = \frac{2+i}{4+1} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

## 3.4 Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$, $b$ et $c$ des réels

C'est comme en 1ère : $ax^2 + bx + c = 0 \Longleftrightarrow a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0 \Longleftrightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}$

Tout dépend donc du signe de $b^2 - 4ac$.

**Théorème 1 Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a$, $b$ et $c$ des réels**

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet toujours des solutions sur $\mathbb{C}$.
Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ le **discriminant** de l'équation

- Si $\Delta = 0$, il existe une unique solution $x = -\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$, il existe deux solutions réelles $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, il existe deux solutions complexes conjuguées $x = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

**Exemple :**