Chapitre 5

Limite de suite et de fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

5.1 Limite finie en $+\infty$

a. Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$.

Définition 1
Dire que $f(x)$ admet pour limite le réel l lorque x tend vers $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.
Interprétation graphique : on dit alors que la droite d'équation $y = l$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

Remarque :
- certaines fonctions n'admettent pas de limite en $+\infty$. Par exemple les fonctions cosinus et sinus.

b. Limite et ordre

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$.

Propriété 1
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = l'$ et $f \leqslant g$ alors $l \leqslant l'$.

Théorème 1
Soit l un réel et f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$, telles que
$g \leqslant f \leqslant h$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

■ **Démonstration :**

Soit J un intervalle ouvert contenant l.
Comme $\lim_{x\to+\infty} g(x) = l$, l'intervalle J contient tous les réels $g(x)$ pour x supérieur M_1.
Comme $\lim_{x\to+\infty} h(x) = l$, l'intervalle J contient tous les réels $h(x)$ pour x supérieur M_2.
On pose $M = \max(M_1; M_2)$, pour tout x supérieur à M, l'intervalle J contient tous les réels $g(x)$ et $h(x)$, or $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ donc J contient tous les réels $f(x)$.
On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.

5.2 Limite infinie en $+\infty$

a. Limite égale à $+\infty$ en $+\infty$

Définition 2
Si lorsque le réel x prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$

- le réel $f(x)$ devient de plus en plus grand et finit par dépasser n'importe quel réel M, on dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- le réel $-f(x)$ devient de plus en plus grand et finit par dépasser n'importe quel réel M, on dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

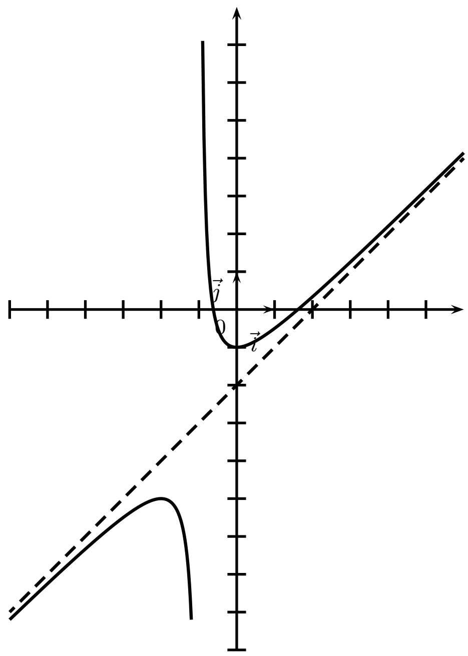
Remarque :
On a le même type de définition pour la limite égale $-\infty$ en $+\infty$, il suffit de considerer $-f(x)$.

Propriété 2
Si une suite u de réels est croissante et non majorée, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b. Asymptote oblique

Définition 3
Dire qu'une droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ signifie que
$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ ou $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

Exemple : Soit $f : x \mapsto x - 2 + \dfrac{1}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
La droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote à C_f car $\lim_{x\to\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$.



c. Théorème de comparaison

Théorème 2
Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$.

- Si pour tout x de $[a;+\infty[$, $f(x) \geqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- Si pour tout x de $[a;+\infty[$, $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

5.3 Limite en un réel a

Définition 4
On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a quand tout intervalle ouvert de la forme $]A;+\infty[$, avec A réel, contient toutes les images $f(x)$ pour x assez proche de a.
On écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.
Dans ce cas, la droite d'équation $x = a$ est **asymptote** à $\mathscr{C}_f$.
On définit de façon analogue f a pour limite $-\infty$ en a.

Remarque :
Le théorème des gendarmes et les théorèmes de comparaison restent valables pour les limites en $-\infty$ ou en réel a.

5.4 Limites et opérations

a. Somme, produit, quotient

Soit deux fonctions f et g, admettant des limites soit en $-\infty$, $+\infty$ ou en un réel a.

Limite d'une somme

$\lim f$	l	l	$+\infty$	$-\infty$
$\lim g$	l'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim(f+g)$	$l+l'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Dans le cas $\lim f = -\infty$ et $\lim g = +\infty$ on ne peut pas tirer de conclusion générale pour $f+g$, il s'agit d'une **forme indéterminée**.

Limite d'un produit

$\lim f$	l	$l \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim g$	l'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(f\times g)$	$l\times l'$	$*\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$*$: $+$ ou $-$ appliquer la règle des signes.
Dans le cas $\lim f = 0$ et $\lim g = \pm\infty$, on ne peut pas tirer de conclusion générale pour $f \times g$, il s'agit d'une **forme indéterminée**.

Limite d'un quotient

$\lim f$	l	l	$+\infty$	$-\infty$
$\lim g$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' \neq 0$	$l' \neq 0$
$\lim(\frac{f}{g})$	$\frac{l}{l'}$	0	$*\infty$	$*\infty$

$*$: $+$ ou $-$ appliquer la règle des signes.
Dans les cas $\lim f = \pm\infty$ et $\lim g = \pm\infty$, $\lim f = 0$ et $\lim g = 0$, on ne peut pas tirer de conclusion générale pour $\frac{f}{g}$, il s'agit de **formes indéterminées**.

Théorème 3
Limites de Fonctions rationnelles
En $+\infty$ et en $-\infty$ uniquement, la limite de la fonction rationnelle définie par $\dfrac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_p x^p + \ldots + b_0}$ (avec $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$ est celle de $x \to \dfrac{a_n x^n}{b_p x^p}$.
On dit qu'à l'infini un quotient de polynômes a même limite que le quotient simplifié de ses termes du plus haut degré.

b. Composée de deux fonctions

c. Composée d'une suite et d'une fonction