Chapitre 5

Produit Scalaire

5.1 Produit Scalaire dans le plan (rappels)

Définition 1
Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan $\mathscr{P}$. Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, est le réel $\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, on pose $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

Remarques :

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ si, et seulement si, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, ou $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2$ qui est le carré scalaire de $\overrightarrow{u}$.

Propriété 1
Soit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$, et H la projection orthogonale de C sur la droite (AB), on a :

1. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont le même sens.
2. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de sens contraire.

Dans les deux cas on a $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Propriété 2 (commutativité, associativité et distributivité)
Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan $\mathscr{P}$ et k un nombre réel. On a :

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$.
- $(k\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = k(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot (k\overrightarrow{v})$
- $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$

Déterminer à partir de la propriété 2 les trois identités remarquables du produit scalaire.

Propriété 3 (produit scalaire dans ron)
Soit $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormal du plan $\mathscr{C}$ et les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$.
On a $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$.

Définition 2
Tout vecteur non nul, orthogonal à un vecteur directeur d'une droite $\mathscr{D}$, est appelé **vecteur normal** à $\mathscr{D}$

Applications : Dans le plan muni repère orthonormal $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$, soit les points $A(1;-2)$, $B(3;6)$ et le vecteur $\overrightarrow{n}(2;-3)$:

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

2. Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$.

Remarques : Dans le repère orthonormal $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ du plan $\mathscr{P}$, toute droite $\mathscr{D}$ a une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$ ou a et b sont les coordonnées d'un vecteur normal à $\mathscr{D}$.

Propriété 4 (distance d'un point à une droite)
Le plan est muni repère orthonormal $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.
Soit $\mathscr{D}$ la droite contenant le point A, de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et d'équation cartésienne $ax+by+c=0$.
La distance d'un point $M(\alpha;\beta)$ à la droite $\mathscr{D}$ est la longueur MH où H est la projection orthogonale de M sur $\mathscr{D}$. On a

$$MH=\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|}=\frac{a\alpha+b\beta+c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$