Chapitre 6

Dérivation et continuité

6.1 Fonctions dérivables

a. Rappels

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a et $a+h$ deux réels de l'intervalle I

Définition 1
Dire qu'une fonction est dérivable en a signifie que le taux de variation de f entre a et $a+h$ tend vers un réel l

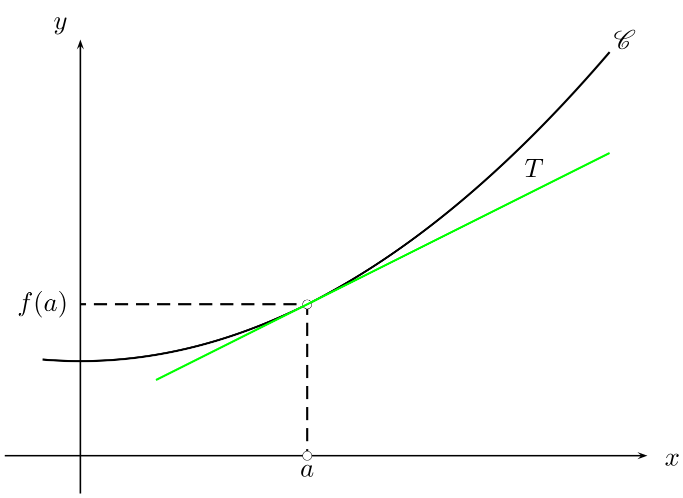
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l.$$

Ce réel l est appelé le nombre dérivée de f en a et on le note $f'(a)$.

Définition 2
Dire que f est dérivable sur I signifie que f est dérivable en tout réel x de I.
La fonction dérivée de f, notée f', est la fonction qui associe à tout réel x de I le nombre dérivé $f'(x)$.

Propriété 1
Soit f une fonction dérivable en a et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
La tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse a a pour coefficient directeur $f'(a)$ et pour équation

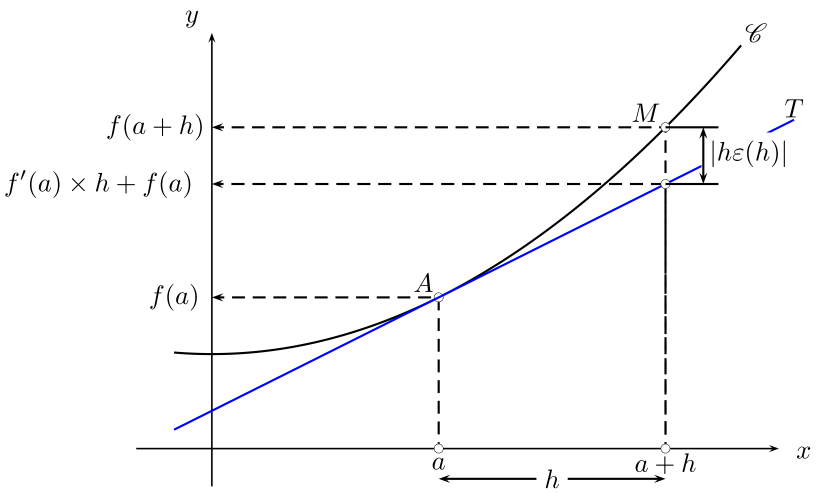
$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$



Définition 3 (Approximation affine)
Si f est dérivable en un réel a de I, alors il existe une fonction ε telle que pour tout réel h avec $a+h$ dans I :

$$f(a+h) = f'(a) \times h + f(a) + h \times \varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

On dit que $f'(a) \times h + f(a)$ est une approximation affine de $f(a+h)$ pour h proche de 0.



b. Opérations et dérivation

Propriété 2
Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I et k un réel, alors les fonctions ku, $u+v$ et uv sont dérivables sur I, et si de plus v ne s'annule pas sur I alors la fonction $\dfrac{u}{v}$, sont dérivables sur I.

Fonction	$u+v$	ku	uv	$\dfrac{1}{v}$	$\dfrac{u}{v}$
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
Fonction dérivée	$u'+v'$	ku'	$u'v+uv'$	$\dfrac{-v'}{v^2}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Théorème 1 (Dérivée d'une fonction composée)
Si v est une fonction dérivable sur I et u une fonction dérivable en $v(x)$ pour tout x de I, alors la fonction composée $u \circ v$ est dérivable sur I et pour tout x de I on a :

$$(u \circ v)'(x) = v'(x) \times (u' \circ v)(x)$$

Remarque : la propriété vu en première
« Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I. Pour tout réel x tel que $ax+b \in I$, la fonction $f : x \mapsto g(ax+b)$ est dérivable et on a $f'(x) = a \times g'(ax+b)$. »
est un cas particulier du théorème 1.

■ **Démonstration :**

Pour tout $x \in I$, on sait que v est dérivable en x.
On a donc $v(x+h) = v'(x)h + v(x) + h\varepsilon(h)$, avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ d'où $u(v(x+h)) = u(v'(x)h + v(x) + h\varepsilon(h))$.
Si on pose $k = v'(x)h + h\varepsilon(h)$ on a $u(v(x+h)) = u(v(x)+k)$
or lorsque h tend vers 0, $k = v'(x)h + h\varepsilon(h)$ tend vers 0 et puisque u est dérivable en $v(x)$ on peut écrire :

$$u(v(x)+k) = u(v(x)) + k \times u'(v(x)) + k\phi(k)), \text{ avec } \lim_{k \to 0} \phi(k) = 0.$$

On en déduit que $u(v(x+h)) - u(v(x)) = (v'(x)h + h\varepsilon(h)) \times u'(v(x)) + (v'(x)h + h\varepsilon(h))\phi(v'(x)h + h\varepsilon(h))$
et on pose $\psi(h) = (v'(x) + \varepsilon(h))\phi(v'(x)h + h\varepsilon(h))$. Par composition et produit de limites on a $\lim\limits_{h \to 0} \psi(h) = 0$.
$u(v(x+h)) - u(v(x)) = hv'(x) \times u'(v(x)) + h(\psi(h) + \varepsilon(h)u'(v(x)))$
Pour $h \neq 0$ on a $\dfrac{u(v(x+h)) - u(v(x))}{h} = v'(x) \times u'(v(x)) + \psi(h) + \varepsilon(h)u'(v(x))$
donc

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(v(x+h)) - u(v(x))}{h} = v'(x) \times u'(v(x))$$

Propriété 3
Soit u fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Les fonctions $\cos u$, $\sin u$, e^u, et u^n, avec $n \in \mathbb{N}^*$ sont dérivables sur I.
Si u ne s'annule pas sur I alors la fonction u^{-n}, avec n un entier naturel non-nul, est dérivable sur I.
Si u est strictement postive alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable dans I.

Fonction	$\cos u$	$\sin u$	u^n	u^{-n}	$\sqrt{u}$	e^u
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
Fonction dérivée	$-u'\sin u$	$u'\cos u$	$nu'u^{n-1}$	$-nu'u^{-n-1}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u'\mathrm{e}^u$

6.2 Continuité d'une fonction

La notion de continuité d'une fonction f a pour objet de traduire mathématiquement le fait que sa courbe représentative peut se tracer sans « trou », sans « lever le crayon ».

a. Continuité

Définition 4
Dire que f est continue en un réel a de l'intervalle ouvert I signifie que f admet une limite en a et que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Une fonction est dite continue sur un intervalle ouvert I si elle continue en tout a de I.

On a les résultats suivants :

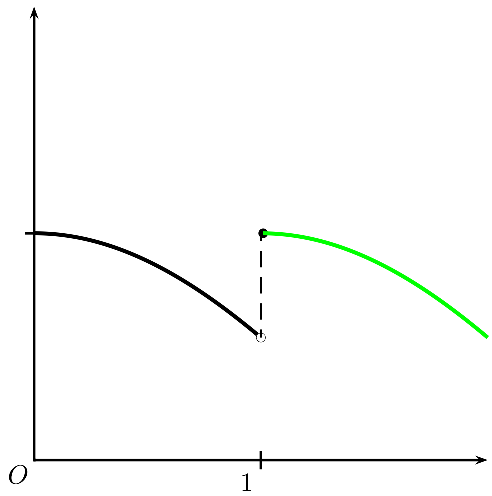
Propriété 4
- Les fonctions polynômes, les fonctions cosinus et sinus sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$.
- Une fonction rationnelle est continue sur chacun des intervalles où elle est définie.
- Si u et v sont continues sur I, alors $u+v$, $u \times v$ et u^n (n entier naturel non nul) sont continues sur I. La fonction $\dfrac{u}{v}$ est continue sur les intervalles où elle est définie.
- Si la fonction v est continue en a et si la fonction u est continue en $v(a)$, alors la fonction $u \circ v$ est continue en a.

b. Quelques exemples

1. Soit f la fonction définie sur $[0;2]$ par

$$f\ : x \mapsto \begin{cases} \cos x \text{ si } x \in\ [0;1] \\ \cos(x-1) \text{ si } x \in\ ]1;2] \end{cases}$$

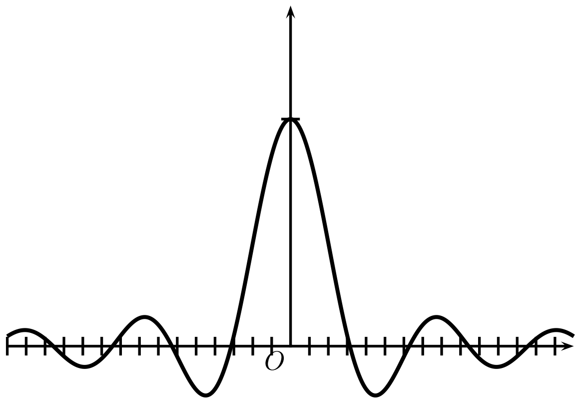
Lorsqu'on trace $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on constate un « décrochage » pour $x = 1$. On peut conjecturer que la fonction f n'est pas continue en 1.



On a $f(1) = \cos 1 \approx 0,54$ $\quad \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \cos(1) \approx 0,54$ $\quad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \cos(0) = 1$, la fonction f est donc discontinue en 1.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

On peut conjecturer que la fonction f est continue en 0.



Pour la démonstration on utilise des inégalités démontrées dans une précédente activité.

Pour tout x de $[-\pi; 0]$ on a $0 \leqslant \sin(x) - x \leqslant \dfrac{x^3}{6}$ et pour tout x de $[0; \pi]$ on a $-\dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) - x \leqslant 0$.

À l'aide du théorème des gendarmes on démontre que $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{sinx}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{sinx}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sinx}{x} = g(0) = 1$, la fonction est donc continue en 0.

3. Partie entière

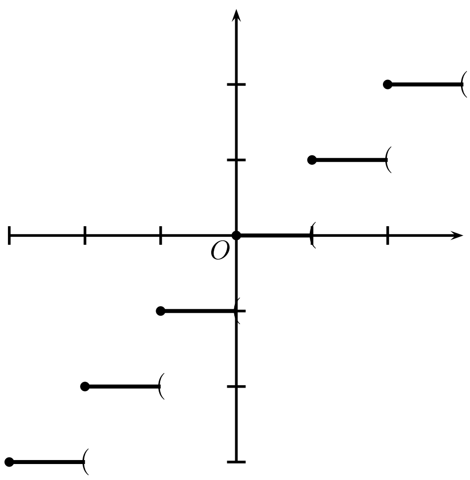
Pour tout réel x, il existe un unique entier n tel que $n \leqslant x < n + 1$. Cet entier n est appelé partie entière du réel x et est noté $E(x) = n$. La fonction partie entière E qui à tout réel x associe $E(x)$ est discontinue pour tout entier p et est continue sur tout intervalle de la forme $[p; p + 1[$.

En effet, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ on a :

si $x \in [p; p + 1[$, alors $E(x) = p$

si $x \in [p - 1; p[$, alors $E(x) = p - 1$

d'où $\lim\limits_{x \to p^-} E(x) = p - 1$ et $\lim\limits_{x \to p^+} E(x) = p$.



c. Lien entre dérivabilité et continuité

Propriété 5
Si une fonction f est dérivable sur l'intervalle I, alors f est continue en I.

■ **Démonstration :**

Soit a un réel de I, comme f est dérivable en a il existe une fonction ε telle que pour tout réel h avec $a + h$ dans I :

$$f(a + h) = f'(a) \times h + f(a) + h \times \varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

On a $f(a + h) - f(a) = f'(a) \times h + h \times \varepsilon(h)$ donc $\lim\limits_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$.

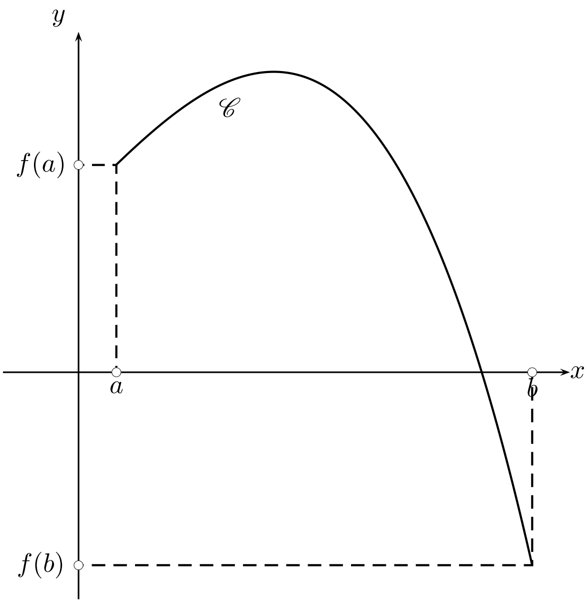
On en déduit que la fonction f est continue en a.

Remarque : la réciproque est fausse, une fonction continue en un réel a de I n'est pas forcément dérivable en a. Par exemple les fonctions valeur absolue et racine carrée sont continues en 0 mais non dérivables en 0.

6.3 Théorème des valeurs intermédiares

a. Cas des fonctions continues

Théorème 2 (des valeurs intermédiaires)
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I. Pour tout réel k conmpris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



Autrement dit l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution.

Remarque : Ce théorème est un théorème d'existence il affirme l'existence d'une solution, mais il ne donne pas de solution.

Des méthodes numériques permettront de donner des valeurs approchées des solutions.

b. Cas des fonctions continues strictement monotones

Théorème 3 (bijection)
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$. Pour tout réel k conmpris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe une unique solution α dans l'intervalle $[a; b]$ à l'équation $f(x) = k$.

■ **Démonstration :**