Chapitre 7

Nombres complexes - Forme trigonométrique

7.1 Notations exponentielle d'un nombre complexe

Soit f la fonction $f\,:\,\theta \mapsto \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ avec θ un nombre réel.
Le nombre complexe $f(\theta)$ est le nombre complexe de module 1 et argument θ.
Le nombre complexe $f(\theta+\theta') = \cos(\theta+\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta+\theta')$ a pour module 1 et pour argument $\theta+\theta'$ or le nombre $f(\theta)\times f(\theta')$ a aussi pour module 1 et $\theta+\theta'$
car pour z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls on a $|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|$ et $\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$
On en déduit que $f(\theta+\theta') = f(\theta)\times f(\theta')$ de plus $f(0) = 1$.
La fonction f ainsi définie vérifie les propriétés de la fonction exponentielle ce qui mène à la notation suivante :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$

Propriété 1
Tout nombre complexe non nul de module r et d'argument θ peut s'écrire :

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \text{ ou } z = r(cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta),$$

et réciproquement, tout nombre complexe qui s'écrit :

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \text{ ou } z = r(cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta),$$

avec r un réel strictement positif, a pour module r et pour argument $\theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

La forme exponentielle complexe possède des propriétés analogues à la fonction exponentielle réelle.

Propriété 2
Soit r et r' des réels strictement positifs, θ et θ' des réels quelconques.

1. $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = rr'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$,

2. $\dfrac{1}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \dfrac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$,

3. $\dfrac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \dfrac{r}{r'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$.