Chapitre 8

Probabilités : conditionnement et indépendance

Dans tout le chapitre, on considère une expérience aléatoire et $\Omega = \{e_1; e_2; \dots e_n\}$ son univers sur lequel est définit une loi de probabilité P. Soit A et B deux évènements avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

8.1 Probabilités conditionnelles

Définition 1
On appelle probabilité de B **sachant** A,noté $P_A(B)$ le réel

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Exemple :

Le tableau ci-dessous donne la répartition d'une classe de terminale.

	Int	Ext	DP	Total
Fille	2	3	11	16
Garçon	1	2	15	18
Total	3	5	26	34

Parmi les élèves de cette classe, on en choisit un au hasard. On considère les évènements suivants A : « l'élève choisi est une fille », B : « l'élève choisi est demi-pensionnaire ».

1. Calculer $P(A)$, $P(B)$. Définir l'événement $A \cap B$ puis calculer $P(A \cap B)$.
2. On choisit une élève parmi les filles.
   Quelle est la probabilité d'obtenir une demi-pensionnaire ?

Propriété 1
Soit A et B deux évènements de Ω tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ on a

$$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B).$$

Propriété 2
Soit A, B et C trois évènements de Ω avec $P(A) \neq 0$.
(1) Si A et B sont incompatibles ($A \cap B = \emptyset$), alors $P_A(B) = 0$.
(2) Si $C \subset B$, alors $P_A(C) \leqslant P_A(B)$.
(3) $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)$.
(4) $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$

Définition 2
Soit k un entier supérieur ou égal à 2.
Dire que k évènements A_1, A_2, ..., A_k forment **une partition** de l'univers Ω signifie que :

(i) Pour tout $i \in \{1; 2; \ldots; k\}$, $A_i \neq \emptyset$.

(ii) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = \Omega$.

(iii) Pour tout entier i et j tels que $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant k$ et $i \neq j$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Remarque : si k évènements A_1, A_2, ..., A_k forment une partition de Ω alors $P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k) = 1$.

Théorème 1 (Formule des probabilités totales)
Soit k entier supérieur ou égal à 2 et k évènements A_1, A_2, ..., A_k de probabilités non nulles formant une partition de Ω.
Pour tout évènement B de Ω on a

$$P(B) = P_{A_1}(B) \times P(A_1) + P_{A_2}(B) \times P(A_2) + \ldots + P_{A_k}(B) \times P(A_k).$$

Remarque : en particulier A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω on a donc $P(B) = P_A(B) \times P(A) + P_{\overline{A}}(B) \times P(\overline{A})$.

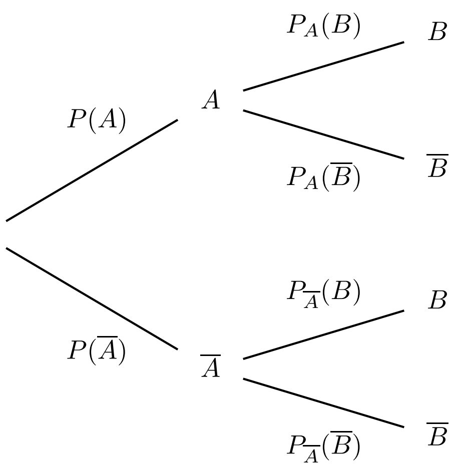
8.2 Arbre pondéré

Soit A un évènement de probabilité différente de 1 et de 0.
On peut représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
Pour construire un arbre, on utilise les trois propriétés suivantes :

- la probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités de ses branches ;
- la somme des probabilités issues d'un même nœud est égale à 1 ;
- la probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent.

Dans le cas particulier d'un arbre à deux branches on a :

- $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$;
- $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$;
- $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$.



Exemple :

Dans une partie du monde, on estime que 15 % de la population est contaminée par un virus X. La stratégie de dépistage met en place un test. On a observé les résultats suivants :

- quand la personne est contaminée par le virus X, le test est positif dans 99,6 % des cas ;
- quand la personne n'est pas contaminée par ce virus, le test est négatif dans 97,8 % des cas.

On considère les événements suivants :

A :« La personne est contaminée par le virus X » ;

B :« La personne a un test positif ».

1. Réaliser un arbre représentant la situation.

2. Calculer $P(B)$ puis calculer la probabilité que le résultat du test soit exact.

8.3 Indépendance de deux événements

Définition 3
Deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$ autrement dit être indépendants signifie que

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Conséquence :
Si deux événements A et B sont indépendants, la probabilité de A sachant B ne dépend pas de la probabilité de B.
Remarque :
il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.

Propriété 3
Soit A et B deux évènements, de probabilité non nulles.

(1) A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

(2) A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$.

8.4 Variable aléatoire et indépendance

a. Rappels sur les variables aléatoires

Définition 4
Une variable aléatoire X définie sur l'univers Ω est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.
On notera $x_1, x_2, \ldots, x_k$ avec $k \leqslant n$ les valeurs prises par X.

Définition 5
Lorsqu'à chaque valeur x_i de X on associe la probabilité de l'évènement $(X = x_i)$, notée $P(X = x_i)$, on définit une loi de probabilité sur l'ensemble $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, appelée la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b. Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 6
Soit X et Y deux variables aléatoires sur Ω prenant respectivement les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_k$ et $y_1, y_2, \ldots, y_p$ avec $k \leqslant n$ et $p \leqslant n$.
Dire que x et Y sont indépendantes signifie que pour tout i et j tels que $1 \leqslant i \leqslant k$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, les évènements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants, c'est-à-dire :
pour tout i et j tels que $1 \leqslant i \leqslant k$ $P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$.