9.1 Défintion et propriétés

9.1 Défintion et propriétés

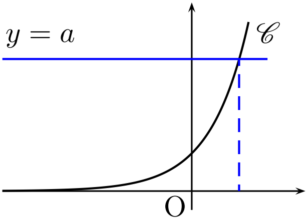
La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ de plus $\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

9.1 Défintion et propriétés

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ de plus $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.
D'après le théorème de la bijection il existe une unique solution à l'équation $\mathrm{e}^x = a$ avec a un réel strictement positif.

9.1 Défintion et propriétés

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ de plus $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
D'après le théorème de la bijection il existe une unique solution à l'équation $e^x = a$ avec a un réel strictement positif.



Définition

Définition

La fonction exponentielle admet une fonction réciproque défine sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ appelée fonction logarithme népérien.

Définition

La fonction exponentielle admet une fonction réciproque défine sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ appelée fonction logarithme népérien.
On note $\ln x$ l'image d'un réel strictement positif par cette fonction. Alors, pour tout $x > 0$, $e^{\ln x} = x$ et pour tout réel x, $\ln e^x = x$

Définition

La fonction exponentielle admet une fonction réciproque défine sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ appelée fonction logarithme népérien.
On note $\ln x$ l'image d'un réel strictement positif par cette fonction. Alors, pour tout $x > 0$, $e^{\ln x} = x$ et pour tout réel x, $\ln e^x = x$

Conséquences :

Définition

La fonction exponentielle admet une fonction réciproque défine sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ appelée fonction logarithme népérien.
On note $\ln x$ l'image d'un réel strictement positif par cette fonction. Alors, pour tout $x > 0$, $e^{\ln x} = x$ et pour tout réel x, $\ln e^x = x$

Conséquences :

- $\ln(1) = 0$

Définition

La fonction exponentielle admet une fonction réciproque défine sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ appelée fonction logarithme népérien.
On note $\ln x$ l'image d'un réel strictement positif par cette fonction. Alors, pour tout $x > 0$, $e^{\ln x} = x$ et pour tout réel x, $\ln e^x = x$

Conséquences :

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(\mathrm{e}) = 1$

Définition

La fonction exponentielle admet une fonction réciproque défine sur $]0,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ appelée fonction logarithme népérien.
On note $\ln x$ l'image d'un réel strictement positif par cette fonction. Alors, pour tout $x > 0$, $e^{\ln x} = x$ et pour tout réel x, $\ln e^x = x$

Conséquences :

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(\mathrm{e}) = 1$
- Pour tout réel λ, l'équation $\ln(x) = \lambda$ admet une unique solution $x = \mathrm{e}^{\lambda}$

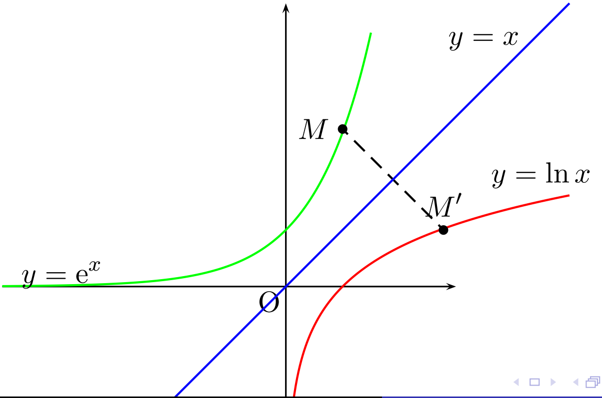
Propriété

Propriété

Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Propriété

Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.



Propriété

Propriété

La fonction logarithme néperien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Propriété

La fonction logarithme néperien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Démonstration

Propriété

$\boxed{\text{La fonction logarithme néperien est strictement croissante sur }]0;+\infty[.}$

Démonstration

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

Propriété

La fonction logarithme néperien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Démonstration

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$.
On sait que $a = \mathrm{e}^{\ln a}$ et $b = \mathrm{e}^{\ln b}$ d'où $\mathrm{e}^{\ln a} < \mathrm{e}^{\ln b}$

Propriété

La fonction logarithme néperien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Démonstration

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$.
On sait que $a = \mathrm{e}^{\ln a}$ et $b = \mathrm{e}^{\ln b}$ d'où $\mathrm{e}^{\ln a} < \mathrm{e}^{\ln b}$
Or la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
donc $\ln a < \ln b$

9.2 Propriétés algébriques

9.2 Propriétés algébriques

Pour tous réels a et b de $]0;+\infty[$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

9.2 Propriétés algébriques

$$\boxed{\text{Pour tous réels } a \text{ et } b \text{ de }]0;+\infty[,\ \ln(ab) = \ln a + \ln b.}$$

Démonstration

9.2 Propriétés algébriques

Pour tous réels a et b de $]0;+\infty[$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Démonstration

Soit a et b deux réels strictement positifs, on a

9.2 Propriétés algébriques

$\boxed{\text{Pour tous réels } a \text{ et } b \text{ de }]0;+\infty[,\ \ln(ab) = \ln a + \ln b.}$

Démonstration

Soit a et b deux réels strictement positifs, on a
$\mathrm{e}^{\ln(ab)} = ab$ et $\mathrm{e}^{\ln(a)+\ln(b)} = \mathrm{e}^{\ln(a)} \times \mathrm{e}^{\ln(b)} = ab$

9.2 Propriétés algébriques

$\boxed{\text{Pour tous réels } a \text{ et } b \text{ de }]0;+\infty[,\ \ln(ab) = \ln a + \ln b.}$

Démonstration

Soit a et b deux réels strictement positifs, on a
$\mathrm{e}^{\ln(ab)} = ab$ et $\mathrm{e}^{\ln(a)+\ln(b)} = \mathrm{e}^{\ln(a)} \times \mathrm{e}^{\ln(b)} = ab$
d'où $\mathrm{e}^{\ln(ab)} = \mathrm{e}^{\ln(a)+\ln(b)}$

9.2 Propriétés algébriques

Pour tous réels a et b de $]0;+\infty[$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Démonstration

Soit a et b deux réels strictement positifs, on a
$\mathrm{e}^{\ln(ab)} = ab$ et $\mathrm{e}^{\ln(a)+\ln(b)} = \mathrm{e}^{\ln(a)} \times \mathrm{e}^{\ln(b)} = ab$
d'où $\mathrm{e}^{\ln(ab)} = \mathrm{e}^{\ln(a)+\ln(b)}$
et donc $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

9.2 Propriétés algébriques

Pour tous réels a et b de $]0;+\infty[$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Démonstration

Soit a et b deux réels strictement positifs, on a
$\mathrm{e}^{\ln(ab)} = ab$ et $\mathrm{e}^{\ln(a)+\ln(b)} = \mathrm{e}^{\ln(a)} \times \mathrm{e}^{\ln(b)} = ab$
d'où $\mathrm{e}^{\ln(ab)} = \mathrm{e}^{\ln(a)+\ln(b)}$
et donc $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

Pour tous réels a et b de $]0;+\infty[$, $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$ et $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$.

Pour tout réel a de $]0;+\infty[$ et tout entier relatif n

$$\ln(a^n) = n \ln a.$$

Pour tout réel a de $]0;+\infty[$ et tout entier relatif n

$$\ln(a^n) = n \ln a.$$

On démontre ce résultat par récurrence.

Pour tout réel a de $]0;+\infty[$ et tout entier relatif n

$$\ln(a^n) = n\ln a.$$

On démontre ce résultat par récurrence.

Pour tout réel a de $]0;+\infty[$, $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln a$.

Pour tout réel a de $]0;+\infty[$ et tout entier relatif n

$$\ln(a^n) = n \ln a.$$

On démontre ce résultat par récurrence.

Pour tout réel a de $]0;+\infty[$, $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2} \ln a$.

Démonstration

Pour tout réel a de $]0;+\infty[$ et tout entier relatif n

$$\ln(a^n) = n \ln a.$$

On démontre ce résultat par récurrence.

Pour tout réel a de $]0;+\infty[$, $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2} \ln a$.

Démonstration Soit a un réel strictement positifs, on a

Pour tout réel a de $]0;+\infty[$ et tout entier relatif n

$$\ln(a^n) = n \ln a.$$

On démontre ce résultat par récurrence.

Pour tout réel a de $]0;+\infty[$, $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln a$.

Démonstration Soit a un réel strictement positifs, on a $\ln a = \ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a})$ or

Pour tout réel a de $]0;+\infty[$ et tout entier relatif n

$$\ln(a^n) = n \ln a.$$

On démontre ce résultat par récurrence.

Pour tout réel a de $]0;+\infty[$, $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2} \ln a$.

Démonstration Soit a un réel strictement positifs, on a
$\ln a = \ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a})$ or
Pour tous réels a et b de $]0;+\infty[$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

Pour tout réel a de $]0; +\infty[$ et tout entier relatif n

$$\ln(a^n) = n \ln a.$$

On démontre ce résultat par récurrence.

Pour tout réel a de $]0; +\infty[$, $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2} \ln a$.

Démonstration Soit a un réel strictement positifs, on a
$\ln a = \ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a})$ or
Pour tous réels a et b de $]0; +\infty[$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
d'où $\ln a = \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{a}) = 2 \ln(\sqrt{a})$

Pour tout réel a de $]0;+\infty[$ et tout entier relatif n

$$\ln(a^n) = n \ln a.$$

On démontre ce résultat par récurrence.

Pour tout réel a de $]0;+\infty[$, $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2} \ln a$.

Démonstration Soit a un réel strictement positifs, on a
$\ln a = \ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a})$ or
Pour tous réels a et b de $]0;+\infty[$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
d'où $\ln a = \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{a}) = 2\ln(\sqrt{a})$
et donc $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2} \ln a$