## Exercice 1 **13 points**

On considère les fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + x\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x.$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions $f$ et $g$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unités graphiques : 2 cm).

**Partie A**

**1.** **a)** On a :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x^2 - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -x\mathrm{e}^{x} = 0$ (croissance comparée fonction exponentielle et fonction puissance de $x$).

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

**b)** Pour tout réel $x$, on a

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + x\mathrm{e}^{-x}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x}$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x} + 1\right)x\mathrm{e}^{-x}$$

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}\left(\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x} + 1\right)$$

On a

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x} + 1 = 1$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -\mathrm{e}^{x} = 0$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{-x} = -\infty$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

**2.** Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.

**a)** Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $h(x) = x\mathrm{e}^{-x}$, d'où
$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$
La courbe $\mathscr{C}_g$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

**b)** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $h(x)$ est du signe de $x$.

- Pour $x < 0$ on a $h(x) < 0$ la courbe $\mathscr{C}_f$ est en dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$,
- pour $x = 0$ on a $h(x) = 0$ les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent au point $O(0; 0)$,
- pour $x > 0$ on a $h(x) > 0$ la courbes $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$.

**Partie B**

**1.** **a)** Après avoir justifié la dérivabilité de la fonction $f$, déterminer $f'(x)$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - x$ est un polynôme du second degré, elle est donc dérivable.

La fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ est produit de fonctions dérivable, elle est donc dérivable.

On en déduit que la fonction $f$ est dérivable en tant que somme de fonctions dérivables.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
$f'(x) = x - 1 + \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}$
$f'(x) = x - 1 + (1 - x)\mathrm{e}^{-x}$

**b)** On factorise par $(x-1)$ et on obtient $f'(x) = (x-1)(1-\mathrm{e}^{-x})$

On résout dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$1-\mathrm{e}^{-x} \leq 0$

$1 \leq \mathrm{e}^{-x}$

$\mathrm{e}^{0} \leq \mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow 0 \leq -x$ (la fonction exponentielle est croissante)

$x \leq 0$

on en déduit le tableau de signe de $f'(x)$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1-\mathrm{e}^{-x}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

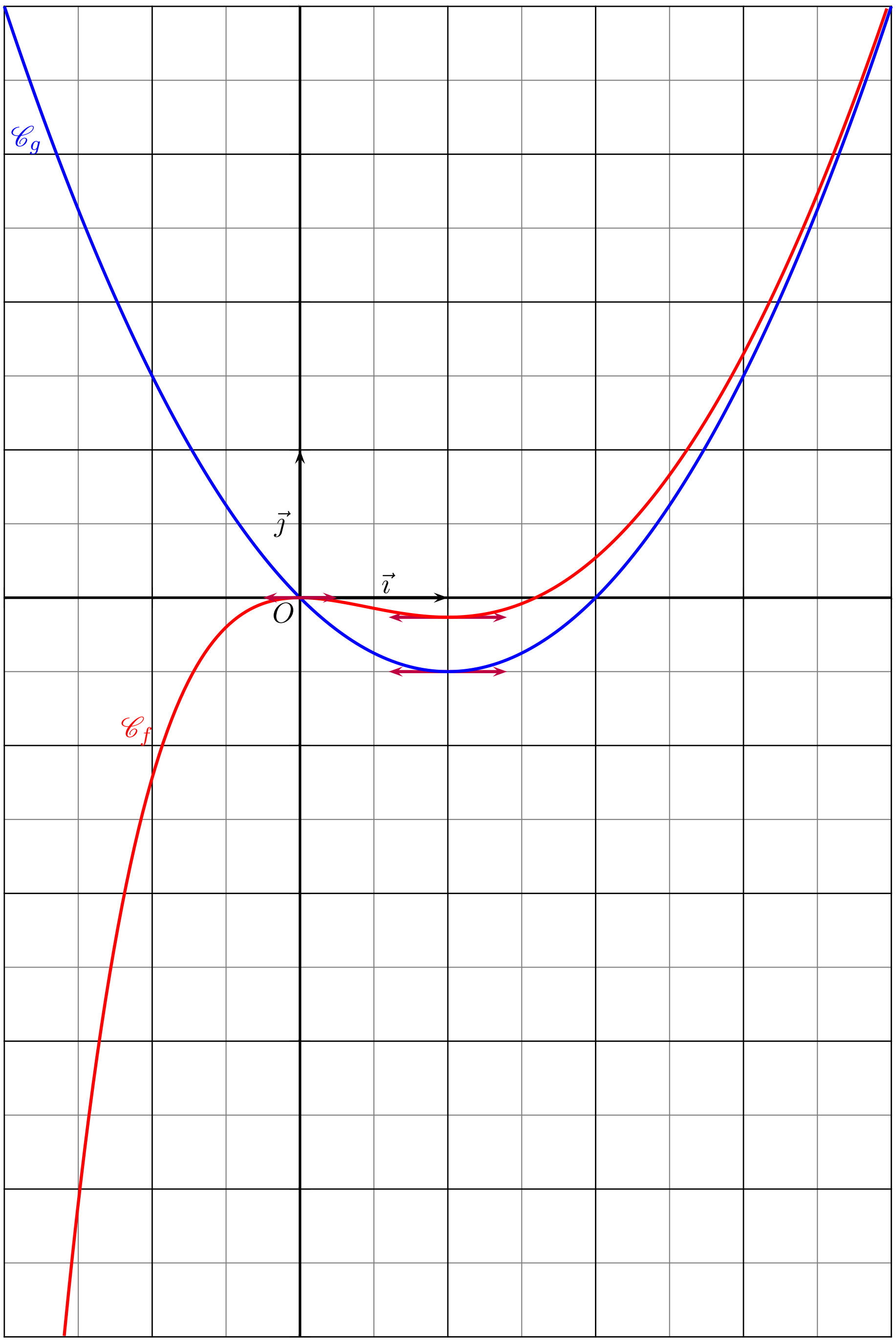
**c)**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $\frac{1}{\mathrm{e}}-\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**2.** La fonction $g$ est une fonction trinôme du second degré ($x \mapsto ax^2+bx+c$) avec $a = \frac{1}{2} > 0$, on a

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**3.**




## Exercice 2 **7 points**

**1.** **a)** Comme pour tout réel $x$ le produit $f(-x)f'(x) = 1$, aucun de ces deux nombres ne peut être nul. La fonction ne peut s'annuler sur $\mathbb{R}$.

**b)** La fonction $f$ étant supposée dérivable, $g$ l'est donc aussi.
On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -f'(-x)f(x) + f(-x)f'(x)$
Or $f(-x) \times f'(x) = 1$, l'égalité est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, elle est donc vraie pour $-x$, donc $f(x) \times f'(-x) = 1$.
On a donc $g'(x) = -1 + 1 = 0$.

La dérivée de $g$ est nulle, on en déduit que $g$ est constante.

**c)** Il en résulte que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(0) = f(0) \times f(0) = (-4)^2 = 16$.
Donc $g(x) = f(-x)f(x) = 16$.

**d)** On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(-x) \times f(x) = 16$ et $f(-x) \times f'(x) = 1$, on déduit que $f'(x) = \dfrac{1}{f(-x)}$ et $\dfrac{f(x)}{16} = \dfrac{1}{f(-x)}$ (car $f(-x) \neq 0$).

En comparant les deux égalités on obtient : $f'(x) = \dfrac{1}{16}f(x)$ qui signifie que $f$ est une solution de l'équation différentielle (E) $y' = \dfrac{1}{16}y$. De plus la condition initale montre que $f(0) = -4$.

**2. Question de cours**

**a)** Soit la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = K\mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$ où $K$ est un réel quelconque.
On a pour tout réel $x$ on a $h'(x) = K\dfrac{1}{16}\mathrm{e}^{\frac{x}{16}} = \dfrac{1}{16}h(x)$.
La fonction $h$ est bien une solution de l'équation différentielle (E), $y' = \dfrac{1}{16}y$.
Les fonctions de la forme $x \mapsto K\mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$ sont des solutions de l'équation différentielle (E).

Réciproquement, soit $\varphi$ une solution de l'équation différentielle (E), $y' = \dfrac{1}{16}y$.
et $\psi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\mathrm{e}^{\frac{x}{16}}}$.
La fonction $\psi$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ car pour tout réel $x$, $\mathrm{e}^{\frac{x}{16}} \neq 0$, elle est dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables.
Deplus on a

$$\psi'(x) = \frac{g'(x)\mathrm{e}^{\frac{x}{16}} - \frac{1}{16}g(x)\mathrm{e}^{\frac{x}{16}}}{\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{16}}\right)^2} \quad \text{or} \quad g'(x) = \frac{1}{16}g(x)$$

$$\psi'(x) = \frac{\frac{1}{16}g(x)\mathrm{e}^{\frac{x}{16}} - \frac{1}{16}g(x)\mathrm{e}^{\frac{x}{16}}}{\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{16}}\right)^2}$$

$$\psi'(x) = 0.$$

On en déduit que la fonction $\psi$ est constante.
On en déduit que pour tout réel $x$, $\psi(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\mathrm{e}^{\frac{x}{16}}} = K$ et donc $\phi(x) = K\mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$.
Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto K\mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$ où $K$ est un réel quelconque.

**b)** Si $y$ est une solution de l'équation différentielle (E), $y = K\mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$ avec la condition iniale $y(0) = -4$ entraîne $y(0) = K = -4$.
Finalement $y(x) = -4\mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$.

**3.** D'après la question **1.** $f(0) = -4$ et $f$ est solution de (E).
D'après la question **2.** $f(x) = -4\mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$.
On peut calculer $f'(x) = -4 \times \dfrac{1}{16}\mathrm{e}^{\frac{x}{16}} = -\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$.
On vérifie que $f(-x) \times f'(x) = -4\mathrm{e}^{\frac{-x}{16}} \times -\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{x}{16}} = 1$ et $f(0) = -4$.
Conclusion
la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4\mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$ est l'unique fonction derivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions (C).