Ensemble de points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

▶ Exercice 4

On a $(z-1)^2$, on cherche a en déterminer les parties réelle et imaginaire.

$(z-1)^2 = (x+\mathrm{i}y-1)^2$

$(z-1)^2 = (x-1+\mathrm{i}y)^2$

$(z-1)^2 = (x-1)^2 + 2(x-1)y\mathrm{i} - y^2$

$(z-1)^2 = (x-1)^2 - y^2 + 2(x-1)y\mathrm{i}$

La partie réelle de $(z-1)^2$ est $(x-1)^2 - y^2$ et la partie imaginaire est $2(x-1)y$.

a) $(z-1)^2$ réel équivaut à $2(x-1)y = 0$ soit $x = 1$ ou $y = 0$
L'ensemble cherché est donc deux droites d'équations respectives $D_1 : x = 1$ et $D_2 : y = 0$.

b) $(z-1)^2$ imaginair pur équivaut à $(x-1)^2 - y^2 = 0$

$$\begin{array}{l}(x-1)^2 - y^2 = 0 \\ (x-1-y)(x-1+y) = 0\end{array} \quad \text{soit } y = x-1 \text{ ou } y = -x+1$$

L'ensemble cherché est donc deux droites d'équations respectives $D_3 : y = x-1$ et $D_4 : y = -x+1$.

▶ Exercice 5

On a

$z + \overline{z} + z\overline{z} = 0$

$x + \mathrm{i}y + (x - \mathrm{i}y) + x^2 + y^2 = 0$

$x^2 + 2x + y^2 = 0$

$(x+1)^2 - 1 + y^2 = 0$

$(x+1)^2 + y^2 = 1$

L'ensemble cherché est un cercle de centre $I(-1;0)$ et de rayon $R = 1$.

Équations du second, troisième et quatrième degré

▶ Exercice 6

soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par
$f(z) = z^2 + z + 1$

1. $f(z) = z^2 + z + 1 = 0$
Les coefficients de cette équation du second degré sont réelles on a donc
$\Delta = -3$ et $z_1 = \dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$.

2. Un nombre complexe z est invariant par f si et seulement si $f(z) = z$.

$z^2 + z + 1 = z$

$z^2 + 1 = 0$

$z_3 = \mathrm{i}$ ou $z_4 = -\mathrm{i}$

3. Quels sont les nombres complexes dont l'image par f est un réel ?

On a $\begin{array}{l} z^2 + z + 1 \\ x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i} + x + \mathrm{i}y + 1 \end{array}$

La partie réelle de $z^2 + z + 1$ est $x^2 - y^2 + 1$ et la partie imaginaire est $2xy + y$.

$z^2 + z + 1$ est un réel si et seulement si $(2x+1)y = 0$ soit $x = -\dfrac{1}{2}$ ou $y = 0$.

Il s'agit donc des nombres complexes de la forme $z = x$ ou $z' = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}y$ avec x et y des réels.

▶ Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - 2z + 26 = 0$ classique $\Delta = -100$, $z_1 = 1 - 5\text{i}$ et $z_2 = 1 + 5\text{i}$

2. $z^4 - 8z^2 - 9 = 0$ (faute de frappe dans l'énoncé), il s'agit d'une équation bicarré poser $Z = z^2$ on obtient $Z^2 - 8Z - 9 = 0 \ldots\ldots$ $S = \{-\text{i}; \text{i}; -3; 3\}$.

▶ Exercice 8

Soit (E) l'équation $z^3 - 5z^2 + 19z + 25 = 0$.

1. Montrer que -1 est une solution de (E).
$-1 - 5 - 19 + 25 = -25 + 25 = 0$ le nombre -1 est bien solution de l'équation (E).

2. On cherche a tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on ait $\begin{array}{l} z^3 - 5z^2 + 19z + 25 = (z+1)(z^2 + az + 25) \\ z^3 - 5z^2 + 19z + 25 = z^3 + (a+1)z^2 + (a+25)z + 25 \end{array}$

On identifie
$\left\{\begin{array}{l} a + 1 = -5 \\ a + 25 = 19 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -5 - 1 \\ a = 19 - 25 \end{array}\right.$ d'où $a = -6$.

3. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

$z^3 - 5z^2 + 19z + 25 = 0$

$(z+1)(z^2 - 6z + 25) = 0$

$z_1 = -1$ où $z^2 - 6z + 25 = 0$ $\Delta = -64$, $z_2 = 3 - 4\text{i}$ et $z_3 = 3 + 4\text{i}$
$S = \{-1; 3 - 4\text{i}; 3 + 4\text{i}\}$

▶ Exercice 9

À tout complexe z $\left(z \neq \dfrac{1}{2}\right)$, on associe le complexe Z défini par :

$$Z = \frac{z-2}{2z-1}$$

1. Déterminer les valeurs de z telles que $Z = z$.

$Z = z$

$\dfrac{z-2}{2z-1} = z$

$z - 2 = z(2z-1)$

$2z^2 - 2z + 2 = 0$

$z^2 - z + 1 = 0$

$z_1 = \dfrac{1 - \sqrt{3}\text{i}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{1 + \sqrt{3}\text{i}}{2}$

2. Déterminer les valeurs de z telles que $Z = -z$.

$Z = -z$

$\dfrac{z-2}{2z-1} = -z$

$z - 2 = -z(2z-1)$

$2z^2 - 2 = 0$

$z^2 - 1 = 0$

$z_3 = -1$ et $z_4 = 1$.

3. Déterminer les valeurs de z telles que $Z = z^2$(une des valeurs trouvées précédemment convient).

$Z = z^2$

$\dfrac{z-2}{2z-1} = z^2$

$z - 2 = z^2(2z-1)$

$2z^3 - z^2 - z + 2 = 0$

-1 est une solution car $-2-1+1+2=0$

On cherche à déterminer a tel que $\begin{array}{l}(z+1)(2z^2+az+2)=2z^3-z^2-z+2\\ 2z^3+(2+a)z^2+(a+2)z+2=2z^3-z^2-z+2\end{array}$

on en déduit que $a+2=-1$ d'où $a=-3$.

$2z^3-z^2-z+2=0 \Leftrightarrow (z+1)(2z^2-3z+2)=0$

Les solutions sont $S=\left\{-1;\dfrac{3-\mathrm{i}\sqrt{7}}{4};\dfrac{3+\mathrm{i}\sqrt{7}}{4}\right\}$

▶ Exercice 10 extrait Bac S 2008

Soit A, B et I les points d'affixes respectives $1+\mathrm{i}$, $3-\mathrm{i}$ et 2.
À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=z^2-4z$.

1. Calculer les affixes des points A′ et B′, images respectives des points A et B. Que remarque-t-on ?

On a

$$z_{A'}=(1+\mathrm{i})^2-4*(1+\mathrm{i})$$
$$z_{A'}=1+2\mathrm{i}-1-4-4\mathrm{i}$$
$$z_{A'}=-4-2\mathrm{i}$$
$$z_{B'}=(3-\mathrm{i})^2-4*(3-\mathrm{i})$$
$$z_{B'}=9-6\mathrm{i}-1-12+4\mathrm{i}$$
$$z_{B'}=-4-2\mathrm{i}$$

On remarque que A' et B' sont confondus, les points A et B ont même image.

2. Déterminer les points qui ont pour image le point d'affixe -5.

$$-5=z^2-4z$$
$$z^2-4z+5=0$$

On a $\Delta=-4$ d'où $z_1=2-\mathrm{i}$ et $z_2=2+\mathrm{i}$

les points qui ont pour image -5 sont $P(2-\mathrm{i})$ et $Q(2+\mathrm{i})$.

3. Vérifier que pour tout nombre complexe z on a :

$$\begin{array}{l}(z-2)^2=z^2-4z+4\\ (z-2)^2=z'+4\end{array}.$$