Soit k un réel strictement positif, on considère la famille de fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = x - k(x+1)\mathrm{e}^{-x}$.
On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de f_k dans un repère orthonormal $\left(O;\ \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

1. À l'aide d'une calculatrice représenter les courbes $\mathscr{C}_k$ pour $k = 0,5$,$k = 1$, $k = 3$. Formuler des conjectures concernant

a) les limites de f_k en $\pm\infty$.

b) l'existence d'un point commun à toutes les courbes $\mathscr{C}_k$.

c) l'existence d'un minimum pour chaque fonction f_k.

2. a) Montrer qu'il existe un point commun à toutes les courbes de la famille.

b) Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$.

3. a) Déterminer la limite de f_k en $-\infty$ et $+\infty$.

b) Montrer que pour tout $k > 0$, $\mathscr{C}_k$ admet une droite asymptote (Δ) dont on donnera une équation.

c) Préciser les positions relatives de $\mathscr{C}_k$ et (Δ).

4. a) Calculer $f_k'(x)$

b) Déterminer une équation de la tangente $T_{k,O}$ à la courbe $\mathscr{C}_k$ au point d'abscisse 0.
Que peut on dire de toute les tangentes $T_{k,O}$?

c) Montrer que $f_k'(x)$ est du signe de $e^x + kx$.

d) Soit la fonction g_k définie sur $\mathbb{R}$ par $g_k(x) = e^x + kx$.
Montrer que l'équation $g_k(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution a_k unique.

e) En déduire que f_k admet un minimum unique en a_k et vérifier que :
$f_k(a_k) = a_k + 1 + \dfrac{1}{a_k}$.