R.O.C *4 pts*

Pré-requis :

- $\exp(0) = 1$,
- la fonction exp est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec
- pour tout $x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) \neq 0$,
- $(\exp)' = \exp$.

En utilisant les pré-requis, démontrer le théorème suivant :

> Soit k un réel donné. Il existe une unique fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f' = kf$ et $f(0) = 1$. Cette fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \exp(kx)$.

Exercice *6 pts*

Soit la fonction f définie sur $\mathcal{G}$ par : $f(x) = (x^2 - 3)\mathrm{e}^x$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

2. Étudier le sens de variation de f.

3. Déterminer les extremums locaux de f.

4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq -2\mathrm{e}$.

R.O.C

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \exp(kx)$.
On a $f(0) = \exp(0) = 1$ de plus pour tout réel x on a $f'(x) = k\exp(kx) = kf(x)$. La fonction f est bien une solution de l'équation différentielle $f' = kf$ avec $f(0) = 1$.
Si g est une fonction telle que $g' = kg$ et $g(0) = 1$, comme la fonction exponentielle ne s'annule pas, on peut définir pour tout réel x, la fonction $\phi(x) = \dfrac{g(x)}{\exp(kx)}$.
La fonction ϕ est dérivable (quotient de fonctions dérivables) sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\phi'(x) = \frac{g'(x)\exp(kx) - kg(x)\exp(kx)}{\exp(kx)^2}$$

$$\phi'(x) = \frac{kg(x) - kg(x)}{\exp(kx)}$$

$$\phi'(x) = 0.$$

La fonction ϕ est constante sur $\mathbb{R}$, or $\phi(0) = \dfrac{g(0)}{\exp(0)} = 1$.

On en déduit que pour tout réel x, $\phi(x) = 1$ soit $\dfrac{g(x)}{\exp(kx)} = 1$ et donc $g(x) = \exp(kx)$.

L'unique solution de l'équation différentielle $f' = kf$ avec $f(0) = 1$ est donc la fonction $x \mapsto \exp(kx)$

Exercice

1. $f(x) = 0$

$(x^2 - 3)\mathrm{e}^x = 0$ or $\mathrm{e}^x \neq 0$

$x^2 - 3 = 0$

$x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$

Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont $x_1 = -\sqrt{3}$ et $x_2 = \sqrt{3}$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 2x\mathrm{e}^x + (x^2 - 3)\mathrm{e}^x$

$f'(x) = (x^2 + 2x - 3)\mathrm{e}^x$

Comme $\mathrm{e}^x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x^2 + 2x - 3$.

Ce trinôme admet deux racines -3 et 1 et est du signe de $a = 1$ à l'extérieur des ses racines.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$6\mathrm{e}^{-3}$	$\searrow$	$-2\mathrm{e}$	$\nearrow$	

3. La fonction dérivée s'annule en changeant de signe respectivemment en -3 et 1, la fonction f admet donc un maximum local en -3 qui vaut $6\mathrm{e}^{-3}$ et un minimum local en 1 qui vaut $-2\mathrm{e}$.

4. À l'aide du tableau on déduit que pour tout $x \in [-3; +\infty[$, $f(x) \geq -2\mathrm{e}$.

On sait que $f(x)$ est du signe de $x^2 - 3$ or ce trinôme admet deux racines $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$ et est du signe de $a = 1$ à l'extérieur des ses racines donc pour $x < -\sqrt{3}$ on a $f(x) > 0$.

Pour $x \in]-\infty; -3]$, $f(x) > 0 > -2\mathrm{e}$, on en conclut que pour tout $x \in R$, $f(x) \geq -2\mathrm{e}$.