Durée : 2 heures
Calculatrice autorisée.

▶ Exercice 1 ROC 6 pts

Prérequis : on pourra utiliser les résultats concernant « les opérations et les limites » de suites.

1. Soit (u_n) une suite « polynomiale du second degré » définie pour tout entier naturel n par $u_n = an^2 + bn + c$ avec a un réel non-nul et b et c deux réels donnés.

a) Montrer que pour $n > 0$ on a $u_n = an^2(1 + \dfrac{b}{an} + \dfrac{c}{an^2})$

b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} an^2$

2. Soit (u_n) une suite « polynomiale de degré k » définie pour tout entier naturel n par $u_n = a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_0$ avec a_k un réel non-nul et a_i pour i entier compris entre 0 et $k-1$ des réels donnés.

a) En s'inspirant des questions **1.** a) et **1.** b), démontrer la propriété ci-dessous :
« Une suite (u_n) polynômiale a même limite que son terme de plus haut degré. »

b) Application : déterminer la limite de la suite définie pour tout entier n par $u_n = 12n^5 - 3n^3 - n^2 + 25n + 1$.

▶ Exercice 2 D'après Bac S juin 2009 6.5 pts

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout nombre entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4.$$

On pose, pour tout nombre entier naturel n, $v_n = u_n - 6$.

1. Pour tout nombre entier naturel n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

2. Démontrer que pour tout nombre entier naturel $n, u_n = -5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 6$.

3. Étudier la convergence de la suite (u_n).

4. On souhaite écrire un algorithme pour calculer la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (u_n) $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. Modifier l'algorithme ci-dessous pour calculer la somme S_n.

Variables :	i et n sont des entiers naturels. S et u sont des réels.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à u la valeur 1 et à S la valeur 1.
Traitement :	Pour i variant de 1 à n. Affecter à u la valeur $\frac{1}{3}u + 4$
Sortie :	Afficher S.

▶ Exercice 3 D'après Bac S sept 2007 7.5 pts

La suite u est définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{23}{27}$ pour tout entier naturel n.

1. On a représenté dans un repère orthonormé direct du plan **en annexe**, la droite d'équation $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{23}{27}$. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u.

2. Démontrer que si la suite u est convergente alors sa limite est $\ell = \dfrac{23}{18}$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $u_n \geqslant \dfrac{23}{18}$.

4. Émettre une conjecture concernant les variations de la suite u, puis la démontrer par récurrence.

5. En déduire la limite de la suite u.