Durée : 2 heures Calculatrice autorisée.

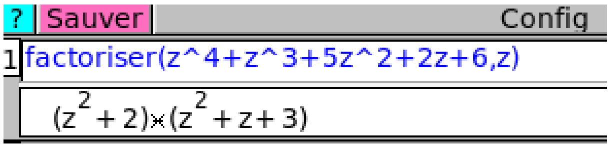
▶ Exercice 1 5 pts

On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$$z^4 + z^3 + 5z^2 + 2z + 6 = 0$$

1. Montrer que $\mathrm{i}\sqrt{2}$ est une solution de (E).

2. Jusitifier par le calcul la factorisation ci-dessous obtenue à l'aide du logiciel de calcul formel XCAS :



3. Résoudre alors l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

▶ Exercice 2 5 pts

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Soit f la transformation complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = (1 - \mathrm{i})z + \mathrm{i}\overline{z}$$

1. Existe-il un point M tel que son image M' est pour affixe i.

2. Déterminer l'ensemble de points M tels que z' soit imaginair pur.

3. Déterminer les points M invariants par f c'est-à-dire tels que $f(z) = z \Longleftrightarrow z' = z)$.

▶ Exercice 3 6 pts

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = 3 \quad \text{et pour tout entier naturel}\, n,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right) \quad (\star)$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1. On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x}\right).$$

Démontrer que la fonction f admet un minimum.
En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant \sqrt{7}$.

2. a) Soit n un entier naturel quelconque.
Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

b) Pourquoi peut-on en déduire que la suite (u_n) est convergente ?

c) On déduit de la relation $(\star)$ que la limite ℓ de cette suite est telle que $\ell = \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{7}{\ell}\right)$.
Déterminer ℓ.

3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - \sqrt{7} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(u_n - \sqrt{7}\right)^2}{u_n}$.

4. On définit la suite (d_n) par :

$$d_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n^2.$$

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$u_n - \sqrt{7} \leqslant d_n.$$

b) Voici un algorithme :

Variables :	n et p sont des entiers naturels
	d est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de p.
Initialisations :	Affecter à d la valeur 1.
	Affecter à n la valeur 0
Traitement :	Tant que $d > 10^{-p}$.
	Affecter à d la valeur $0,5d^2$
	Affecter à n la valeur $n+1$.
Sortie :	Afficher n.

En entrant la valeur 9, l'algorithme affiche le nombre 5.
Quelle inégalité peut-on en déduire pour d_5 ?
Justifier que u_5 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.

▶ Exercice 4 4 pts

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chaque question une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de la question et la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

QUESTIONS	RÉPONSES
1. La forme algébrique de $\dfrac{5-2\text{i}}{4+3\text{i}}$ est :	☐ $\dfrac{26}{25}+\dfrac{7}{25}\text{i}$ ☐ $\dfrac{14}{25}-\dfrac{23}{25}\text{i}$ ☐ $\dfrac{5}{4}-\dfrac{2}{3}\text{i}$ ☐ $\dfrac{26}{25}-\dfrac{23}{25}\text{i}$
2. Le conjugué de $\dfrac{1-z}{1+\text{i}}$, où z est un complexe, est :	☐ $\dfrac{1+\overline{z}}{1-\text{i}}$ ☐ $\dfrac{-1-z}{-1+\text{i}}$ ☐ $\dfrac{1-\overline{z}}{1-\text{i}}$ ☐ $(1-z)\times(1-\text{i})$
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. À tout nombre complexe $z \neq -2$ on associe le nombre complexe z' défini par $z' = \dfrac{z-4\text{i}}{z+2}$	
3. L'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est un réel	☐ un cercle ☐ une droite ☐ une droite privée d'un point ☐ un cercle privé d'un point
4. L'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est un imaginair pur	☐ un cercle ☐ une droite ☐ une droite privée d'un point ☐ un cercle privé d'un point