Durée : 3 heures , calculatrice autorisée

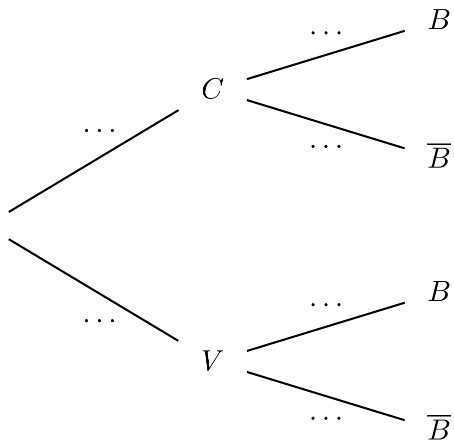
▶ Exercice 1 3 pts

Des cônes de glace sont emballés individuellement puis conditionnés par lots de 12. Les cônes sont vendus par la grande distribution aux particuliers.
Dans un emballage de 12 cônes il y a deux parfums : chocolat ou vanille avec éclats de noisettes ou sans et il est composé ainsi :

- 5 vanilles.
- 5 chocolats aux éclats noisettes.
- 5 cônes sans éclats de noisettes.

Madame Michu après avoir acheté un paquet de cône les range dans son congélateur situé à la cave qui n'est pas éclairée. Au cours du repas le petit Jordan Michu descend à la cave choisir un cône dans le noir dans cet emballage présent dans son congélateur qui ne possède pas de système d'éclairage interne. On admet qu'il choisit au hasard un cône.
On considère les évènements suivants :
C : « le cône choisi est un cône chocolat »
V : « le cône choisi est un cône vanille »
B : « le cône est aux éclats de noisettes »

1. Décrire et compléter la situation à l'aide de l'arbre pondéré ci-contre.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement « on choisit un cône vanille aux éclats de noisettes ».
3. Sachant qu'il choisit un cône au chocolat, quelle est la probabilité que ce cône soit sans éclats de noisettes ?
4. Sachant qu'il choisit un cône aux éclats de noisettes, quelle est la probabilité que ce cône soit à la vanille ?



▶ Exercice 2 4 pts

Soit u la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$u(x) = x^2 - 2 + f(x).$$

avec f une fonction continue, dérivable et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et telle que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

1. Étudier les variations de u sur $]0\ ;\ +\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0\ ;\ +\infty[$.
On note α cette solution.
3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.
4. On souhaite déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α par dichotomie :

- On part d'un intervalle $[a, b]$ contenant α,

- On coupe l'intervalle $[a, b]$ en deux $[a, \dfrac{a+b}{2}]$ et $[\dfrac{a+b}{2}, b]$
- On cherche à determier dans lequel des deux intervalles $[a, \dfrac{a+b}{2}]$ et $[\dfrac{a+b}{2}, b]$ se trouve α
- Pour cela on teste le signe de $u(a) \times u(\dfrac{a+b}{2})$, si il est négatif $\alpha \in [a, \dfrac{a+b}{2}]$ sinon $\alpha \in [\dfrac{a+b}{2}, b]$.
- On répéte le processus avec le nouvel intervalle jusqu'à ce $b - a \leqslant 0.01$

On donne de plus $u(1) = -1$ et $u(2) \approx 2.7$, compléter l'algorithme de dichotomie ci-dessous :

Variables :	a, b et c sont des réels.
Initialisation :	Affecter à a la valeur 1 et à b la valeur 2
Traitement :	.... $b - a > 0.01$ Faire :
	Affecter à c la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
	Si $u(a) \times u(c) \leqslant 0$
	Alors
	Affecter à ....
	Sinon
	Affecter à ....
	Fin de Si
	Fin de ....
Sortie :	Afficher "α est compris entre",a, "et",b.

▶ Exercice 3 5 pts

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Prérequis

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + bi$ où a et b sont deux nombre réels.
On note $\overline{z}$, le nombre complexe défini par $\overline{z} = a - bi$.

Questions

1. Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

2. Démontrer par récuurence, pour tout entier naturel n non nul, et tout nombre complexe z, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

Partie B

On considère l'équation (E) : $z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2 = 0$ où z est un nombre complexe.

1. Montrer que si le nombre complexe z est solution de l'équation (E) alors le nombres complexe $\overline{z}$ est aussi une solution de l"équation (E).

2. On considère le nombre complexe $z_0 = 1 + i$. Vérifier que z_0 est solution de l'équation (E).

3. En déduire une autre solution de l'équation (E).

4. Développer le produit de facteurs $(z - 1 - i)(z - 1 + i)$.

5. Déterminer les réels a et b tels que $z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2 = (z^2 - 2z + 2)(az^2 + b)$

6. En déduire toutes les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

▶ Exercice 4 5 pts

Une nouvelle attraction est ouverte dans un grand parc. Pour tout entier naturel non nul, on note $p_n = P(T_n)$ probabilité de l'évènement T_n : « un problème technique se produit le jour n sur cette attraction ».
On suppose qu'aucun problème technique ne se produit lors de la mise en service correspondant au premier jour.
D'après des études sur les attractions existantes, il est supposé que :

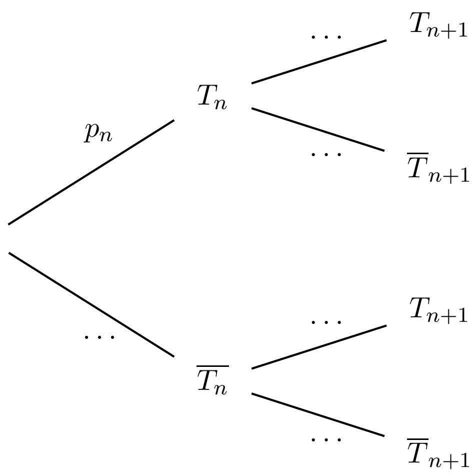
- si un problème technique se produit le jour n, alors la probabilité qu'un problème technique se produise le jour suivant est $\dfrac{3}{5}$;
- si l'attraction n'a subi aucun problème technique le jour n la probabilité qu'un problème technique se produise le jour suivant est $\dfrac{2}{7}$.

1. a) Préciser la probabilité, notée p_1, qu'un problème technique survienne le premier jour.

b) Justifier que $p_2 = \dfrac{2}{7}$.

2. Calculer la probabilité que l'attraction ne subisse aucun problème technique la première semaine.

a) Reproduire et compléter l'arbre suivant.



b) Calculer $P(T_n \cap T_{n+1})$ et $P(\overline{T_n} \cap T_{n+1})$ en fonction de p_n.

c) Montrer que pour tout entier naturel non nul $p_{n+1} = \dfrac{11}{35}p_n + \dfrac{2}{7}$.

3. On définit la suite (u_n) par $u_n = p_n - \dfrac{5}{12}$.

a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

b) En déduire l'espression de la suite (p_n) en fonction de n.

c) Calculer la limite quand n tend vers l'infini de la suite (p_n). Interpréter ce résultat.

▶ Exercice 5 3 pts

Soit $h : x \mapsto \dfrac{7x-4}{x+2}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$

1. À l'aide d'un calcul de logiciel formel on obtient le résultat ci-contre. À partir de ce résultat dresser le tableau de variations de h.

deriver((7x-4)/(x+2))

$$\frac{7}{x+2}+(7\times x-4)\times\left(-\left(\frac{1}{(x+2)^2}\right)\right)$$

factoriser(7/(x+2)+(7*x-4)*(-(1/(x+2)^2)))

$$\frac{18}{(x+2)^2}$$

2. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$

a) Établir, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n \in [2;6]$

b) Étudier les variations de (u_n).

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente. sa limite.