CHAPITRE

1

Suites et principe de récurrence

L'effet domino est une réaction en chaîne qui peut se produire lorsqu'un changement mineur provoque un changement comparable à proximité, qui provoquera un autre changement similaire, et ainsi de suite au cours d'une séquence linéaire. Il a fallu plus de 300 ans pour formaliser le raisonnement par récurrence C'est Fermat et Pascal au XVII^{e} qui jetteraient les bases de ce type de preuve, le principe fut axiomatisé par Peano (mathématicien italien) à la fin du XIX^{e}.

1 Généralités

Définition 1

Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$

$$u: \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n \end{array}$$

Remarques.

- Une suite (u_n) est définie par une **formule explicite** lorsque il existe une relation directe entre le terme u_n et n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Une suite (u_n) est définie par **récurrence** lorsque il existe une relation entre chaque terme u_n et le ou les précédent(s) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemples.

1. La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 + n + 5$ est définie de manière explicitement en fonction de n.
2. La suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = 2v_n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est définie par récurrence. Le calcul d'un terme nécessite de connaître le terme précédent.

Définition 2

Dire d'une suite (u_n) qu'elle est croissante (resp. décroissante) signifie que pour tout entier n
$u_n \leqslant u_{n+1}$ (resp. $u_n \geqslant u_{n+1}$).

Remarques.

- Une suite (u_n) est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si pour tout entier n, on a $u_n < u_{n+1}$ (resp. $u_n > u_{n+1}$).
- Il existe des suites ni croissantes ni décroissantes, par exemple la suite u définie pour tout entier n par $u_n = (-1)^n$.

Méthodes.

Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n) on pourra :

- étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$;
- lorsque pour tout entier n, u_n est non-nul et de signe constant on peut comparer le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 ;
- si pour tout entier n on a $u_n = f(n)$ avec f une fonction définie et monotone sur $[0; +\infty[$ alors la suite u et la fonction f ont la même monotonie.

Définition 3

Dire d'une suite (u_n) qu'elle est majorée (respectivement minorée) signifie qu'il existe un réel M (respectivement m) tel que pour tout entier n, $u_n \leq M$ (respectivement $u_n \geq m$).
Dire d'une suite (u_n) qu'elle est bornée signifie qu'elle est minorée et majorée c'est-à-dire il existe un réel m et un réel M tels que pour tout entier n, $m \leq u_n \leq M$.

Exemple. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2 - (2n+3)^2$. La suite (u_n) est minorée en effet pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{array}{l} (2n+3)^2 \geqslant 0 \\ -(2n+3)^2 \leqslant 0 \\ 2 - (2n+3)^2 \geqslant 2 \\ u_n \geqslant 2 \end{array}$$

2 Raisonnement par récurrence

Théorème 1

(admis) Raisonnement par récurrence
Soit P_n une propriété relative à l'entier n et n_0 un entier.
Initialisation : si la propriété P_{n_0} est vraie,
Hérédité : et si la véracité de la propriété P_k avec $k \geq n_0$ implique que la propriété P_{k+1} soit vraie alors **pour tout entier** naturel $n \geqslant n_0$ la propriété P_n **est vraie.**

Explications et Compléments vidéo sur ma chaîne Youtube
`https://www.youtube.com/watch?v=BIeO9SGFT48`

Remarques.

- La propriété P_n peut être de différentes natures égalité, inégalité, proposition ...
- Les conditions d'intialisation et d'hérédité sont indispensables (cf contre-exemples)
- La condition d'hérédité est une implication, on suppose que P_k est vraie puis on tente de montrer que P_{k+1} est vraie.

Démontrer par récurrence

Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Initialisation : Pour $n = 1$ on a d'une part $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1$

et d'autre part $\dfrac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6} = \dfrac{6}{6} = 1$.
La propriété P_1 est vraie.
Hérédité : Supposons que pour un entier $k \geqslant 1$ la propriété P_k soit vraie on a donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

On souhaite démontre qu'alors la proposition P_{k+1} est aussi vraie. Pour cela on a :

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2$$

or on a supposé que P_k est vraie. On remplace :

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)[2k^2+7k+6]}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

La propriété P_{k+1} est vraie

Conclusion :d'après le principe de récurrence pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

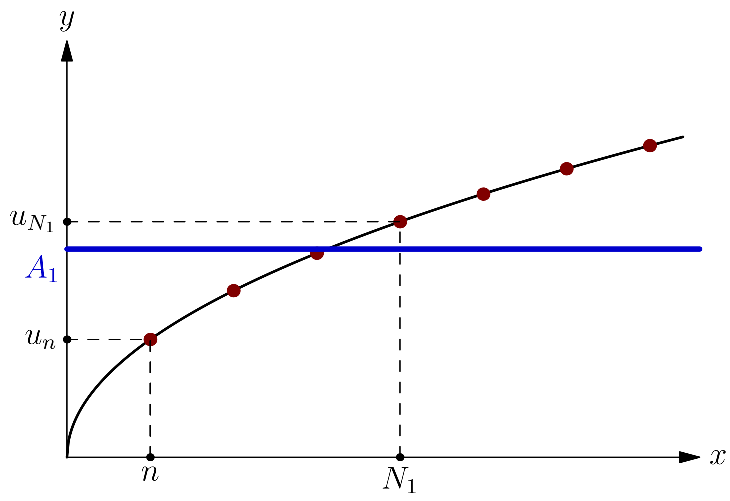
Exercice : inégalité de Bernouilli
Montrer par récurrence l'inégalité $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ avec a un réel strictement positif et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 Limite d'une suite

3.1 Limite infinie

Définition 4

Suite divergeant vers l'infini
Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.
Autrement dit, pour tout réel A il existe un entier N tel que pour tout entier $n \geqslant N$, on ait $u_n > A$.
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.



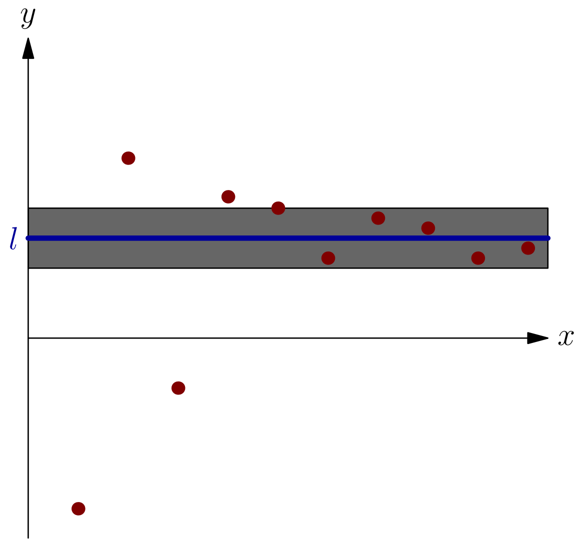
De même, une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty;A[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.

Exemple. La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$ a pour limite $+\infty$. En effet pour tout $A \in \mathbb{R}^+$, l'intervalle $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) pour $n > \sqrt{A}$.

3.2 Limite finie

Définition 5

suite convergeante
Une suite admet pour limite le réel l si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.



Exemple. Soit (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2n+1}{n}$.
La suite (u_n) est convergente et a pour limite 2.
Considérons un intervalle ouvert $I =]2-\alpha; 2+\alpha[$ avec $\alpha > 0$.
Tout d'abord remarquons que $u_n = 2 + \dfrac{1}{n}$.
Si $n \geqslant E\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) + 1$ (E désigne la fonction partie entière), on a $\dfrac{1}{n} < \alpha$ d'où $2-\alpha < u_n < 2+\alpha$.

Théorème 2

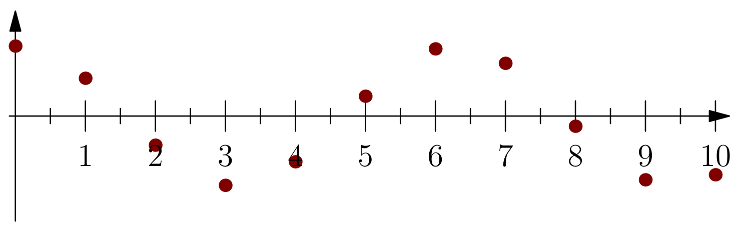
admis
Lorsqu'elle existe la limite d'une suite est unique.

3 3 Des suites sans limites

Une suite n'a pas nécessairement de limite. C'est le cas par exemple pour les suites « alternées » ou celles dont les valeurs oscillent.

Exemples.

1. La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ alterne entre les valeurs -1 et 1.
2. La suite définie par $v_n = \cos n$ sur $\mathbb{N}$ n' a pas de limite, ses termes ne s'accumulent autour d'aucune valeur et sont uniformément répartis dans l'intervalle $[-1; 1]$.



4 Limites et comparaison

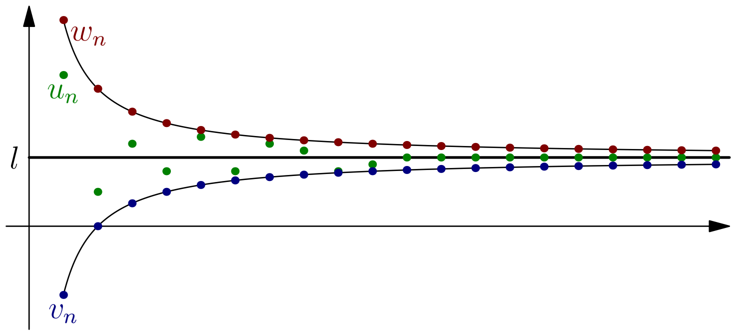
4 1 Théorème des gendarmes

Théorème 3

dit ≪ des gendarmes ≫
Si les suites (u_n), (v_n) et (vn) sont telles que :

- à partir d'un certain rang $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$
- (v_n) et (w_n) ont la même limite finie l,

alors la suite (u_n) converge et a pour limite l.



Démonstration. Soit I un intervalle ouvert contenant l.
Comme la suite (w_n) converge vers l l'intervalle I contient tous les termes v_n à partir d'un certain rang n_0. De même pour la suite (v_n), à partir d'un certain rang n_1 tous les termes $v_n \in I$.
On pose $N = max(n_0, n_1)$ d'où pour $n \geqslant N$ tous les termes v_n et tous les w_n sont dans l'intervalle I. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ d'où à partir du rang N tous les termes $u_n \in I$.
D'après la définition la suite (u_n) converge et sa limite est l.

□

4 2 Théorème de comparaison

Théorème 4

Soit (u_n), (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.
Si à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Démonstration. Soit I un intervalle de la forme $]A; +\infty[$, où A est un réel.
On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ donc d'après la définition il existe un rang n_1 à partir duquel l'intervalle contient tous les v_n c'est-à-dire pour tout $n \geqslant n_0$ on a $v_n > A$. or on sait par hypothèse qu'à partir d'un certain rang n_1 on a $u_n \geqslant v_n$.
Posons $N = max(n_0, n_1)$, pour $n \geqslant N$ on a $u_n \geqslant v_n > a$, donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite (u_n) à partir du rang N on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

□

Le même type de théorème existe pour $-\infty$ et il se démontre de la même manière.

Théorème 5

Soit (u_n), (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.
Si à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

5 Opérations et limites

5.1 Somme

Limite de (u_n)	l	l	$+\infty$	$-\infty$
Limite de (v_n)	l'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Limite de (u_n+v_n)	$l+l'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Dans le cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ on ne peut pas tirer de conclusion générale pour (u_n+v_n), il s'agit d'une **forme indéterminée**.

5.2 Produit

Limite de (u_n)	l	$l\neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Limite de (v_n)	l'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Limite de $(u_n\times v_n)$	$l\times l'$	$*\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$*$: $+$ ou $-$ appliquer la règle des signes.
Dans le cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \pm\infty$, on ne peut pas tirer de conclusion générale pour $(u_n\times v_n)$, il s'agit d'une **forme indéterminée**.

5.3 Quotient

Limite de (u_n)	l	l	$+\infty$	$-\infty$
Limite de (v_n)	$l'\neq 0$	$\pm\infty$	$l'\neq 0$	$l'\neq 0$
Limite de $(\frac{u_n}{v_n})$	$\frac{l}{l'}$	0	$*\infty$	$*\infty$

$*$: $+$ ou $-$ appliquer la règle des signes.
Dans les cas où $\lim u_n = \pm\infty$ et $\lim v_n = \pm\infty$, $\lim u_n = 0$ et $\lim v_n = 0$, on ne peut pas tirer de conclusion générale pour $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$, il s'agit de **formes indéterminées**.

Exemples.

1. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2+n+1$.
   Cette suite est la somme de deux suites $(2n^2)$ et $(n+1)$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$ donc la limite de la somme est $+\infty$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{n+1}{n^2+1}$.
   Cette suite est un quotient de deux suites $(n+1)$ et (n^2+1) or $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+1 = +\infty$
   Il s'agit d'une forme inderterminée, on ne peut pas conclure en utilisant les régles « opérations et limites ». Cependant on peut écrire v_n sous forme factorisée :
   $v_n = \dfrac{n(1+\frac{1}{n})}{n^2(1+\frac{1}{n^2})}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   soit $v_n = \dfrac{1}{n}\times\dfrac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}$ on reconnait un produit et un quotient.
   On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = 1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

6 limites de suites arithmétiques et géométriques

6.1 Suites arithmétiques

Définition 6

- Lorsqu'on obtient chaque terme d'une suite en ajoutant au terme précédent toujours le même réel, appelé raison, la suite est une suite arithmétique.
- La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r, signifie que pour tout entier n, on a $u_{n+1} = u_n + r$.

On rappelle que le terme de rang n d'une suite arithmétique (u_n) de premier terme u_1 et de raison r est $u_n = u_1 + (n-1)r$.
Si le premier terme est u_0 alors le terme de rang n est $u_n = u_0 + nr$.

Propriété 1

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Si $r < 0$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = -\infty$
- Si $r = 0$ alors la suite est constante et égale à u_0, $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = u_0$
- Si $r > 0$ alors on a $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty$

6.2 Suites géométriques

Définition 7

- Lorsqu'on obtient chaque terme d'une suite en multipliant le terme précédent par le même réel, appelé raison, la suite est une suite géométrique.
- la suite (u_n) est une suite géométrique de raison q, signifie que pour tout entier n, on a $u_{n+1} = q \times u_n$.

On rappelle que le terme de rang n d'une suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 \times q^n$.
Si le premier terme est u_1 alors le terme de rang n est $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

Propriété 2

Soit la suite géometrique (q^n) définie sur $\mathbb{N}$ avec q un réel.

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (q^n) = +\infty$
- Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (q^n) = 1$
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (q^n) = 0$
- Si $q \leqslant -1$ alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

Démonstration.

- Pour $q > 1$ il existe un réel $a > 0$ tel que $q = 1 + a$, on utilise l'inégalité de Bernouilli d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ soit $q^n \geqslant 1 + na$ or $\lim 1 + na = +\infty$ d'après le théorème de comparaison on a $\lim q^n = +\infty$
- Pour $-1 < q < 1$, le cas $q = 0$ se résume à une suite constante égale à 0. Si $q \neq 0$ alors on peut considerer la suite $\left(\frac{1}{|q|}\right)^n$. On a $\frac{1}{|q|} > 1$ comme vu précédement on a $\lim \left(\frac{1}{|q|}\right)^n = +\infty$. Par passage à l'inverse on en déduit que $\lim |q|^n = 0$ soit $\lim q^n = 0$.

□

Dans le cas général, pour étudier le comportement d'une suite géométrique on utilise cette propriété en tenant compte du signe du premier terme u_0 puisque pour tout entier n on a $u_n = u_0 \times q^n$.

Propriété 3

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

	$u_0 < 0$	$u_0 > 0$
$q \leqslant -1$	Pas de limite	
$-1 < q < 1$	la suite (u_n) tend vers 0	
$q = 1$	la suite (u_n) tend vers u_0	
$q > 1$	la suite (u_n) tend vers $-\infty$	la suite (u_n) tend vers $+\infty$

7 Limites de suites monotones

Propriété 4

Si une suite croissante a pour limite l, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à l.

Démonstration. Soit une suite (u_n) croissante de limite l.
Raisonnons **par l'absurde**, supposons qu'il existe un terme u_k strictement supérieur à l. Comme la suite (u_n) est croissante pour tout $n \geqslant k$ on a $u_n \geqslant u_k > l$.
L'intervalle ouvert $I =]l - \frac{1}{2}; u_k[$ contient l mais pas les u_n pour $n > k$.
On obtient une contradiction avec le fait que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leqslant l$.

□

Théorème 6

dit de la « convergence monotone »(admis)

- Une suite croissante majorée converge c'est-à-dire admet une limite finie.
- Une suite décroissante minorée converge c'est-à-dire admet une limite finie.

Ce théorème est un théorème d'existence, il justifie l'existence d'une limite finie mais ne précise pas cette limite.

Théorème 7

- Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.
- Une suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

Démonstration. Soit une suite (u_n) croissante non majorée et A un réel.
La suite est non majorée alors il existe donc un entier k tel que $u_k > A$. La suite est croissante donc pour tout $n \geqslant k$ on a $u_n \geqslant u_k > A$. Tous les termes de la suite appartiennent à $]A; +\infty[$ à partir du rang k, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ □

EXERCICES

Récurrence

1 Formule explicite.
Soit (u_n) la suite de premier terme $u_0 = 2$ définie sur $\mathbb{N}$ par et $u_{n+1} = \left(\frac{3}{4}\right)u_n - \frac{1}{2}$.
Montrer que pour tout entier n on a :

$$u_n = 4\left(\frac{3}{4}\right)^n - 2$$

.
Correction et commentaires en vidéo `https://www.youtube.com/watch?v=bi1SEak9WMw`

2 Formule explicite bis.
Soit (u_n) la suite de premier terme $u_0 = 1$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. Étudier le sens de variation de la suite u.
2. (a) Montrer que pour tout entier n, $u_n > n^2$.
   (b) En déduire la limite de la suite u.
3. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n, puis démontrer la conjecture par récurrence.

3 Somme de produits.
Soit $S_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots + n(n+1)$ pour n entier naturel.
Montrer que $S_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

4 Somme des n premiers carrés.
Soit, pour n un entier naturel non nul, $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$.
Démontrer par récurrence que $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

5 Factorielle et inégalité.
Montrer que pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{p=0}^{n-1} p! \leqslant n!$$

6 Copie d'élèves.
On considère n droites du plan non parallèles deux à deux ni concourrantes trois à trois. On note R_n le nombre de régions du plan délimitées par ces n droites.

1. Expliquer pourquoi pour tout entier $n \geqslant 1$ on a $R_{n+1} = R_n + n + 1$.
2. À la question « Montrer par un raisonnement par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, $R_n = \frac{n^2+n+2}{2}$. »
   Ci-dessous la solution proposée par l'élève A :

   On a $R_0 = 0 \neq 1$
   l'hy
   rang 0 donc $R_n \neq \frac{n^2+n+2}{2}$.

   Ci-dessous la solution proposée par l'élève B :

   Pour $n = 1$ on $R_1 = 2$
   et $\frac{1^2+1+2}{2} = \frac{4}{2} = 2$
   l'hy 1
   Suppo n on
   ait
   $R_n = \frac{n^2+n+2}{2}$
   alors $R_{n+1} = \frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}$
   $R_{n+1} = \frac{n^2+3n+4}{2}$
   l'hy
   $n+1$.
   Donc d'aprè
   currence on a pour tout entier
   $n \geqslant 1$
   $R_n = \frac{n^2+n+2}{2}$.

   Expliquer pourquoi aucune des deux réponses d'élèves n'est satisfaisante puis en rédiger une qui le soit.

7 Variation de fonction et de suite.
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $h(x) = \frac{7x-4}{x+2}$

1. (a) Déterminer les limites de h aux bornes de son domaine de définition.
   (b) Déterminer h' la fonction de dérivée de h puis étudier le signe de $h'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

(c) Dresser le tableau de variation complet de h.

2. Soit u la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = h(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
(a) Calculer les trois premiers termes de la suite u.
(b) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [2;6]$
(c) Démontrer par récurrence que la suite u est décroissante.

Limites