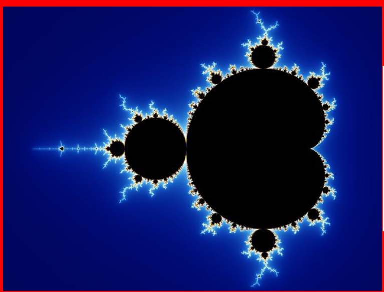
CHAPITRE

2

Nombres complexes 1/2



L'ensemble de Mandelbrot est une fractale définie comme l'ensemble des points c du plan complexe pour lesquelles la suite définie par $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = {z_n}^2 + c$ ne tend pas vers l'infini en module.

1 Ensemble des nombres complexes

1 1 Motivations

Étant donné que certaines équations polynomiales à coefficients réels n'ont pas toujours de solution, on cherche à construire un nouvel ensemble de nombres :

- contenant tous les nombres réels,
- muni de deux opérations prologeant l'addition et la multiplication des nombres réels et ayant les mêmes règles de calculs,
- contenant un élément noté i tel que $i^2 = -1$,
- tout nombre z s'écrive de manière unique $z = a + ib$ où a et b sont des réels.

Un tel ensemble existe, il s'agit de l'ensemble des nombres complexes noté $\mathbb{C}$.

1 2 Vocabulaire et premières propriétés

Définition 1

Un nombre complexe est un nombre de la forme $a + ib$, où a et b sont deux réels et i est le nouveau nombre tel que $i^2 = -1$.

Théorème 1

On définit un ensemble $\mathbb{C}$

- muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$
- contenant un nombre i vérifiant $i^2 = -1$
- tel que chaque élément z de $\mathbb{C}$ peut s'écrire de manière **unique** sous la forme

$$z = a + ib \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ deux nombres réels}$$

Définition 2

Cette écriture $z = a + ib$ unique est appelée **forme algébrique** du complexe z.
Le nombre réel a est appellé **partie réelle** de z et notée $Re(z)$
Le nombre imaginaire b est appellé **partie imaginaire** de z et notée $Im(z)$

Définition 3

Soit $z = a+ib$ et $z' = c+id$ deux nombres complexes on définit les deux opérations addition et multiplication :

- $z + z' = (a + c) + i(b + d)$
- $z \times z' = (ac - bd) + i(ad + bc)$

On vérifie que ces deux opérations sont associatives, communatives que la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Propriété 1

identités remarquables complexes

- $(a + ib)^2 = a^2 + 2iab - b^2$
- $(a - ib)^2 = a^2 - 2iab - b^2$
- $(a + ib) \times (a - ib) = a^2 + b^2$

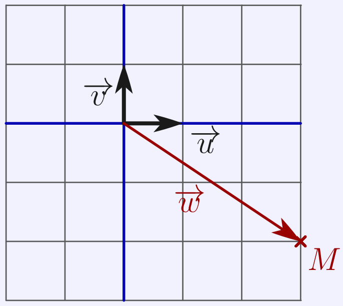
2 Représentation géométrique

Définition 4

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$:

- à tout complexe $z = a + ib$ avec a et b deux réels, on associe le point $M(a;b)$ et le vecteur $\overrightarrow{w}(a;b)$.
- Réciproquement à tout point $M(a;b)$ et vecteur $\overrightarrow{w}(a;b)$ du plan on associe le nombre complexe $z = a + ib$. On dit que le point M et le vecteur ont pour **affixe** z.

Le plan est alors appelé plan complexe.



Remarques.

- Si $b = 0$ alors $z = a$ d'où z est un réel, le point M d'affixe z appartient à l'axe des abscisses.
- Si $a = 0$ alors $z = ib$ on dit que z est un imaginiare pur, le point M d'affixe z appartient à l'axe des ordonnées.
- L'axe des abscisses est appellé **axe des réels** et l'axe des oordonnées est appellé **axe des imaginairs purs**.

Propriété 2

Soit les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

3 Conjugué d'un complexe

Définition 5

On appelle **conjugué** du nombre complexe $z = a + ib$ le nombre $\overline{z} = a - ib$.

Exemples.

$\overline{3 - 2i} = 3 + 2i$ $\qquad \overline{5 + i} = 5 - i$ $\qquad \overline{3} = 3$ $\qquad \overline{i} = -i$

Propriété 3

lien entre conjugué et parties réelle et imaginaire

- $Re(z) = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$
- $Im(z) = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z})$

Démonstration.

soit z un nombre complexe $z = a + ib$ avec a et b deux réels on a :

$$\begin{aligned}
z + \overline{z} &= a + ib + a - ib \\
z + \overline{z} &= 2a \\
z + \overline{z} &= 2Re(z) \\
Re(z) &= \frac{1}{2}(z + \overline{z})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z - \overline{z} &= a + ib - (a - ib) \\
z\overline{z} &= 2ib \\
z - \overline{z} &= 2iIm(z) \\
Im(z) &= \frac{1}{2i}(z - \overline{z})
\end{aligned}$$

□

Propriété 4

Propriétés des conjugués

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$
- $\overline{z^n} = \overline{z}^n$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Remarques. Le produit $z\overline{z}$ est un réel positif, en effet $z\overline{z} = a^2 + b^2$

Propriété 5

- z est un réel $\iff z = \overline{z}$
- z est un imaginaire pur $\iff z = -\overline{z}$

Remarques.

- Pour démontrer qu'un nombre complexe z est réel, on peut calculer son conjugué $\overline{z}$ et vérifier qu'il est égal à z.
- Obtenir la forme algébrique d'une nombre complexe non-nul à l'aide de son conjugué :

$$\frac{1}{2+i} = \frac{1}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} = \frac{2+i}{4+1} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

4 Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Théorème 2

Soit l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \neq 0$, b et c des réels.
Cette équation admet toujours des solutions dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
À l'aide de son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, on distingue trois cas :

- Si $\Delta = 0$, il existe une unique solution $z = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, il existe deux solutions réelles $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, il existe deux solutions complexes conjuguées $z = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Démonstration.

On utilise la forme cannonique vu en classe de première $az^2+bz+c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

- Pour les deux premiers cas $\Delta = 0$ et $\Delta > 0$ ont retrouve les cas vus en première.
- si $\Delta < 0$, on a $-\Delta > 0$ d'où $\Delta = (i\sqrt{-\Delta})^2$.On utilise la forme cannonique

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{(i\sqrt{-\Delta})}{2a}\right)^2 = \left(z + \frac{b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$$

On en déduit les deux solutions de l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ dans ce cas.

□