CHAPITRE

3

Continuité de fonctions

La fonction de Thomae est une fonction définie par le mathématicien allemend Carl Thomae en 1875, il s'agit d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en tout point d'une partie dense $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mais également discontinue sur une autre $\mathbb{Q}$.

1 Continuité d'une fonction

1 1 Notion de continuité

La notion de continuité d'une fonction f a pour objet de traduire mathématiquement le fait que sa courbe représentative peut se tracer sans « trou », sans « lever le crayon ».

Définition 1

Dire que f est continue en un réel a de l'intervalle ouvert I signifie que f admet une limite en a et que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Une fonction est dite continue sur un intervalle ouvert I si elle continue en tout a de I.

On admet les résultats suivants :

Propriété 1

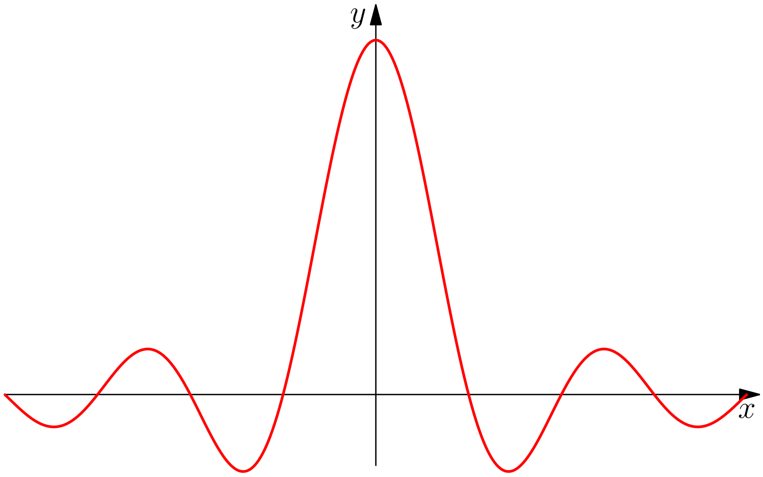
admise

- Les fonctions polynômes sont contiunes sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$.
- Une fonction rationnelle est continue sur chacun des intervalles où elle est définie.
- Si u et v sont continues sur I, alors $u+v$, $u \times v$ et u^n (n entier naturel non nul) sont continues sur I. La fonction $\dfrac{u}{v}$ est continue sur les intervalles où elle est définie.

1 2 Quelques exemples

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

   On peut conjecturer que la fonction f est continue en 0.



   Pour la démonstration on admet les inégalités suivantes :

   pour tout x de $[-\pi;0]$ on a $0 \leqslant \sin(x) - x \leqslant \dfrac{x^3}{6}$

   et pour tout x de $[0;\pi]$ on a $-\dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) - x \leqslant 0$.

À l'aide du théorème des gendarmes on démontre que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = g(0) = 1,$$

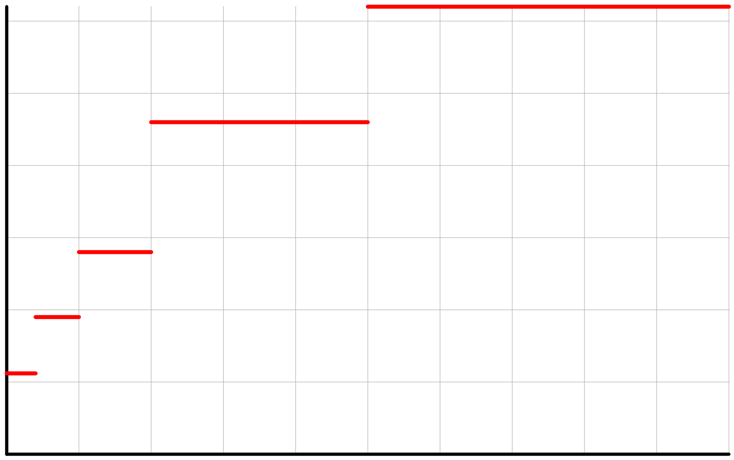
la fonction est donc continue en 0.

2. **Tarif postal**

Le tarif, exprimé en euros, p d'envoi du courrier en France Métropolitaine est fonction du poids, exprimé en gramme , est le suivant :

$$p(x) = \begin{cases} 0,57 & \text{si } x \leqslant 20 \\ 0,95 & \text{si } 20 < x \leqslant 50 \\ 1,40 & \text{si } 50 < x \leqslant 100 \\ 2,30 & \text{si } 100 < x \leqslant 250 \\ 3,10 & \text{si } 250 < x \leqslant 500 \end{cases}$$

On représente graphiquement cette fonction est on constate qu'elle n'est pas continue en 20, 50, 100 et 250.



1 3 Lien entre dérivabilité et continuité

Propriété 2

admis
Si une fonction f est dérivable sur l'intervalle I, alors f est continue en I.

Remarque.
La réciproque est fausse, une fonction continue en un réel a de I n'est pas forcément dérivable en a. Par exemple les fonctions valeur absolue et racine carrée sont continues en 0 mais non dérivables en 0.

2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1

dit des valeurs intermédiaires
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I. Pour tout réel k conmpris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Autrement dit l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution.

Remarque. Ce théorème est un théorème d'existence il affirme l'existence d'une solution, mais il ne donne pas de solution. Des méthodes numériques et algorithmique permettront de donner des valeurs approchées des solutions.

Théorème 2

dit de la bijection
Soit f une fonction continue et **strictement** monotone sur un intervalle $[a; b]$. Pour tout réel k conmpris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe une unique solution α dans l'intervalle $[a; b]$ à l'équation $f(x) = k$.

Remarque. On convient que les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Exemple. Soit f une fonction définie sur $[-3; 5]$ dont les variations sond données ci-dessous, on s'intéresse aux nombres de solutions de l'équation $f(x) = 0$:

x	-3		0		5
f	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	5

D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β avec $\alpha \in [-3; 0]$ et $\beta \in [0; 5]$