CHAPITRE 3

Limites et continuité de fonctions

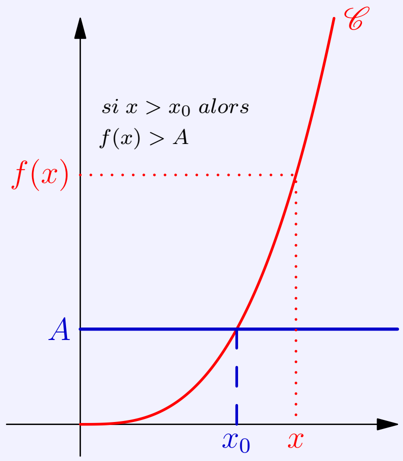
La fonction de Thomae est une fonction définie par le mathématicien allemend Carl Thomae en 1875, il s'agit d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en tout point d'une partie dense $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mais également discontinue sur une autre $\mathbb{Q}$.

1 Limites de fonction

1.1 Limite infinie en $+\infty$

Définition 1

Si lorsque le réel x prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$ le réel $f(x)$ devient de plus en plus grand et finit par dépasser n'importe quel réel A, on dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
C'est-à-dire pour tout $A > 0$, il existe un réel $x_0 > 0$ tel que si $x > x_0$ alors $f(x) > A$.



Remarques.

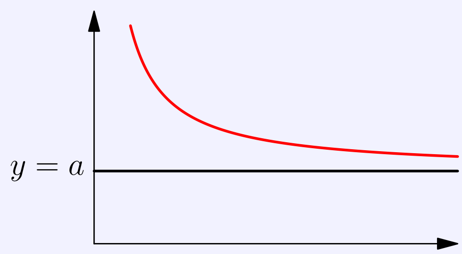
- Le réel $-f(x)$ devient de plus en plus grand et finit par dépasser n'importe quel réel M, on dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
C'est-à-dire pour tout $A < 0$, il existe un réel $x_0 < 0$ tel que si $x > x_0$ alors $f(x) < A$.
- On a le même type de définition pour la limite infinie en $-\infty$.

1.2 Limite finie en $+\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ du plan.

Définition 2

Dire que f admet pour limite le réel l lorque x tend vers $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.
Interprétation graphique : on dit alors que la droite d'équation $y = l$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.



Remarque. Certaines fonctions n'admettent pas de limite en $+\infty$. Par exemple les fonctions cosinus et sinus.

1.3 Limite et ordre

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$.

Propriété 1

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=l'$ et $f\leqslant g$ alors $l\leqslant l'$.

Théorème 1

dit « des gendarmes »

Soit l un réel et f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$, telles que
$g\leqslant f\leqslant h$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=l$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=l$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$.

Démonstration. Soit J un intervalle ouvert contenant l.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=l$, l'intervalle J contient tous les réels $g(x)$ pour x supérieur M_1.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=l$, l'intervalle J contient tous les réels $h(x)$ pour x supérieur M_2.
On pose $M=\max(M_1;M_2)$, pour tout x supérieur à M, l'intervalle J contient tous les réels $g(x)$ et $h(x)$, or $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$ donc J contient tous les réels $f(x)$.
On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$. □

1 4 Théorème de comparaison

Théorème 2

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$.

- Si pour tout x de $[a;+\infty[$, $f(x)\geqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
- Si pour tout x de $[a;+\infty[$, $f(x)\leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

1 5 Limite en un réel a

Définition 3

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a quand tout intervalle ouvert de la forme $]A;+\infty[$, avec A réel, contient toutes les images $f(x)$ pour x assez proche de a.
On écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$.
Dans ce cas, la droite d'équation $x=a$ est **asymptote** à $\mathscr{C}_f$.
On définit de façon analogue f a pour limite $-\infty$ en a.

Remarque. Le théorème des gendarmes et les théorèmes de comparaison restent valables pour les limites en $-\infty$ ou en réel a.

1 6 Limites et opérations

1. Somme

Limite de f	l	l	$+\infty$	$-\infty$
Limite de g	l'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Limite de $(f+g)$	$l+l'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Dans le cas $\lim f(x)=-\infty$ et $\lim g(x)=+\infty$ on ne peut pas tirer de conclusion générale pour $(f+g)$, il s'agit d'une **forme indéterminée**.

2. Produit

Limite de f	l	$l \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Limite de g	l'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Limite de $(f \times g)$	$l \times l'$	$*\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$*$: $+$ ou $-$ appliquer la règle des signes.
Dans le cas $\lim f(x) = 0$ et $\lim g(x) = \pm\infty$, on ne peut pas tirer de conclusion générale pour $(f \times g)$, il s'agit d'une **forme indéterminée**.

3. Quotient

Limite de f	l	l	$+\infty$	$-\infty$
Limite de g	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' \neq 0$	$l' \neq 0$
Limite de $\left(\dfrac{f}{g}\right)$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$*\infty$	$*\infty$

$*$: $+$ ou $-$ appliquer la règle des signes.
Dans les cas $\lim f(x) = \pm\infty$ et $\lim g(x) = \pm\infty$, $\lim f(x) = 0$ et $\lim g(x) = 0$, on ne peut pas tirer de conclusion générale pour $\left(\dfrac{f}{g}\right)$, il s'agit de **formes indéterminées**.

1 7 Quotient de polynômes

Soit deux fonctions f et g, admettant des limites soit en $-\infty$, $+\infty$ ou en un réel a.

Théorème 3

limites de Fonctions rationnelles
En $+\infty$ et en $-\infty$ uniquement, la limite de la fonction rationnelle définie par $\dfrac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_p x^p + \ldots + b_0}$ (avec $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$ est celle de $x \to \dfrac{a_n x^n}{b_p x^p}$.
On dit qu'à l'infini un quotient de polynômes a même limite que le quotient simplifié de ses termes du plus haut degré.