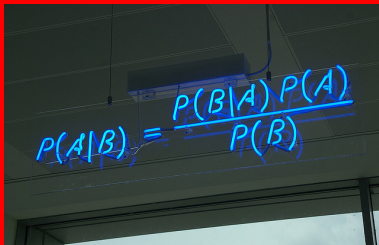


Probabilités : conditionnement et indépendance



La formule de Bayes écrite en néon au sein dans les bureaux de l'entreprise d'informatique Autonomy (filiale de HP) à Cambridge. **Thomas Bayes** (né env. en 1702 à Londres - mort le 7 avril 1761) est un mathématicien britannique et pasteur de l'Église presbytérienne, connu pour avoir formulé le théorème de Bayes.

Dans tout le chapitre, on considère une expérience aléatoire et $\Omega = \{e_1; e_2; \dots e_n\}$ son univers sur lequel est définie une loi de probabilité P . Soit A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

1 Probabilités conditionnelles

Définition 1

On appelle probabilité de B sachant A , noté $P_A(B)$ le réel

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Exemple.

Le tableau ci-dessous donne la répartition d'une classe de terminale.

	Int	Ext	DP	Total
Fille	2	3	11	16
Garçon	1	2	15	18
Total	3	5	26	34

Parmi les élèves de cette classe, on en choisit un au hasard.

On considère les événements suivants

A : « l'élève choisi est une fille »,

B : « l'élève choisi est demi-pensionnaire ».

1. Calculer $P(A)$, $P(B)$. Définir l'événement $A \cap B$ puis calculer $P(A \cap B)$.
2. On choisit une élève parmi les filles.
Quelle est la probabilité d'obtenir une demi-pensionnaire ?

Propriété 1

Soit A et B deux événements de Ω tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ on a

$$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B).$$

Propriété 2

Soit A , B et C trois événements de Ω avec $P(A) \neq 0$.

- Si A et B sont incompatibles ($A \cap B = \emptyset$), alors $P_A(B) = 0$.
- Si $C \subset B$, alors $P_A(C) \leq P_A(B)$.
- $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)$.
- $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$

Définition 2

Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

Dire que k événements A_1, A_2, \dots, A_k forment **une partition** de l'univers Ω signifie que :

- Pour tout $i \in \{1; 2; \dots; k\}$, $A_i \neq \emptyset$.
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = \Omega$.
- Pour tout entier i et j tels que $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq k$ et $i \neq j$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Remarque.

Si k évènements A_1, A_2, \dots, A_k forment une partition de Ω alors $P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k) = 1$.

Théorème 1

Formule des probabilités totales

Soit k entier supérieur ou égal à 2 et k évènements A_1, A_2, \dots, A_k de probabilités non nulles formant une partition de Ω . Pour tout évènement B de Ω on a

$$P(B) = P_{A_1}(B) \times P(A_1) + P_{A_2}(B) \times P(A_2) + \dots + P_{A_k}(B) \times P(A_k).$$

Remarque.

En particulier A et \bar{A} forment une partition de Ω on a

$$P(B) = P_A(B) \times P(A) + P_{\bar{A}}(B) \times P(\bar{A}).$$

2

Arbre pondéré

Soit A un évènement de probabilité différente de 1 et de 0.

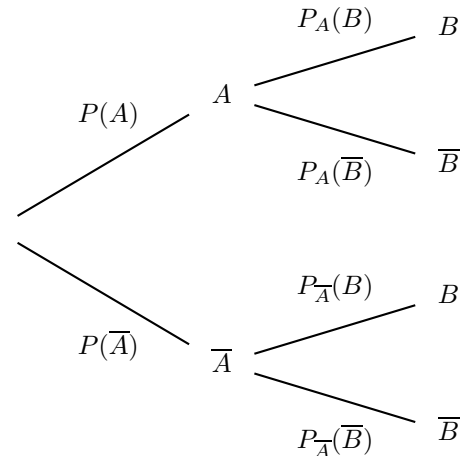
On peut représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

Pour construire un arbre, on utilise les trois propriétés suivantes :

- la probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités de ses branches ;
- la somme des probabilités issues d'un même nœud est égale à 1 ;
- la probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent.

Dans le cas particulier d'un arbre à deux niveaux on a :

- $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$;
- $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$;
- $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$.



Exemple. Dans une partie du monde, on estime que 15 % de la population est contaminée par un virus X . La stratégie de dépistage met en place un test. On a observé les résultats suivants :

- quand la personne est contaminée par le virus X , le test est positif dans 99,6 % des cas ;
- quand la personne n'est pas contaminée par ce virus, le test est négatif dans 97,8 % des cas.

On considère les évènements suivants :

A : « La personne est contaminée par le virus X » ;

B : « La personne a un test positif ».

1. Réaliser un arbre représentant la situation.
2. Calculer $P(B)$ puis calculer la probabilité que le résultat du test soit exact.

3

Indépendance de deux événements

Définition 3

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$ autrement dit être indépendants signifie que

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Remarques.

Attention à ne pas confondre indépendance et incompatibilité.

Si deux événements A et B sont indépendants, la probabilité de A sachant B ne dépend pas de la probabilité de B .

Propriété 3

Soit A et B deux événements, de probabilité non nulles.

- A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.
- A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$.

4

Variable aléatoire et indépendance

4 1 Rappels sur les variables aléatoires

Définition 4

Une variable aléatoire X définie sur l'univers Ω est une fonction de Ω dans \mathbb{R} . On notera x_1, x_2, \dots, x_k avec $k \leq n$ les valeurs prises par X .

Définition 5

Lorsqu'à chaque valeur x_i de X on associe la probabilité de l'évènement $(X = x_i)$, notée $P(X = x_i)$, on définit une loi de probabilité sur l'ensemble $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, appelée la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

4 2 Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 6

Soit X et Y deux variables aléatoires sur Ω prenant respectivement les valeurs x_1, x_2, \dots, x_k et y_1, y_2, \dots, y_p avec $k \leq n$ et $p \leq n$.

Dire que X et Y sont indépendantes signifie que pour tout i et j tels que $1 \leq i \leq k$ et $1 \leq j \leq p$, les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants, c'est-à-dire : pour tout i et j tels que $1 \leq i \leq k$

$$P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j).$$