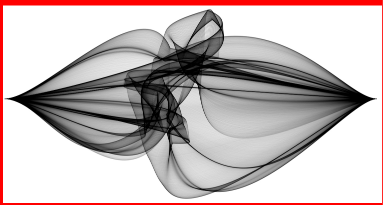
CHAPITRE

5

Compléments sur la dérivation



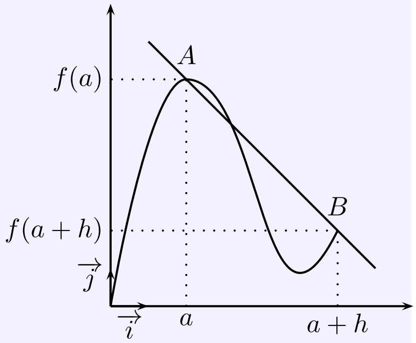
L'artiste Jean-François Renaud (morpholux), à partir d'une utilisation du logiciel Processing, contrôle le point mitoyen d'un tracé vectoriel. Puis enchaîne avec un déplacement global du point et de ses leviers grâce à la fonction noise()... un algorithme aussi connu sous l'appellation bruit de Perlin. Les courbes de Bézier (proposé par Pierre Bezier 1910-1999) composent l'outil de la base du dessin vectoriel qui repose sur la transcription mathématique des objets en créant des formes du plan et de l'espace à partir de points de contrôle et de leurs nombres dérivés.

1 Rappels

1.1 Nombre derivé

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a est un réel de I.
Dire que le réel l est le nombre dérivé de f en a signifie que :
la fonction $h \mapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ avec $(h \neq 0)$ a pour limite l en zéro.
On dit alors que la fonction f est dérivable en a et on note $f'(a)$ le nombre dérivé de la fonction f en a.



Remarque. Certaines fonctions ne sont pas dérivables, par exemple la fonction valeur absolue $f : x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.
En effet on a $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{|h|}{h} = -1$ et $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{|h|}{h} = 1$ dans ce cas le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ pour $a = 0$ n' a pas de limite lorque h tend vers 0

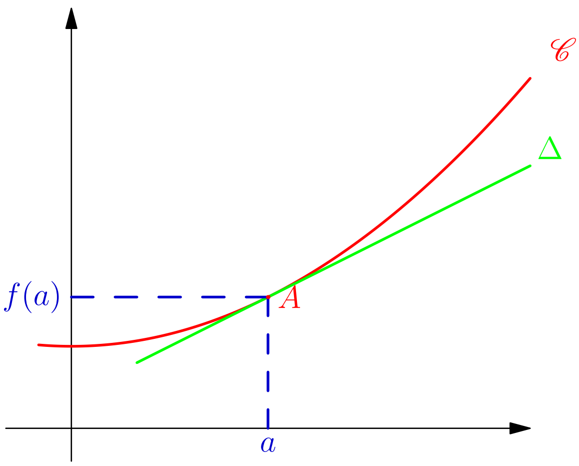
Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, dérivable en $a \in I$ et $\mathscr{C}_f$ la courbe representative de la fonction f dans un repère $(O\,;\,\vec{\imath};\,\vec{\jmath})$.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(a, f(a))$ est la droite qui passe par A et qui a pour coeffecient directeur $f'(a)$.

Propriété 1

Si f est dérivable en a, alors une équation de la tangente en $A(a, f(a))$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$



1 2 Fonction derivée

Définition 3

Une fonction est dérivable sur un intervalle I signifie qu'elle est dérivable en tout réel x de I.
À tout x de I on associe son nombre dérivé $f'(x)$ on définie ainsi une fonction appelée fonction dérivée de f et notée f'.

Propriété 2

Dérivées usuelles

Fonction f	$\mathscr{D}_f$	Fonction f'	$\mathscr{D}_{f'}$
$x \mapsto ax+b$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \ n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

Ces résultats sont à connaitre par cœur.

Propriété 3

Dérivé et opérations
Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.
Les règles opératoires de dérivation sont les suivantes :

- $(ku)' = ku'$ avec k une constante
- $(u+v)' = u' + v'$
- $(u \times v) = u'v + uv'$

De plus si v ne s'annule on a :

- $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

1 3 lien variation d'une fonction et signe de sa dérivée

Le signe de la fonction dérivée pemet de donner des indications concernant les variations de la fonction et par conséquent les éventuels extremums sur un intervalle.

Théorème 1

admis
Soit f une fonction définie et dérivable sur I.

- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$ alors la fonction f est décroissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ alors la fonction f est croissante sur I.

Exemple.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 7$.
On a $f'(x) = 2x - 4 = 2(x-2)$ d'où :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

2 Formules complémentaires

2.1 Derivée de $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

Propriété 4

Soit u une fonction définie, positive et dérivable sur un intervalle I et f la fonction définie sur I par $f(x) = \sqrt{u(x)}$.
La fonction f est dérivable en tout réel x tel que $u(x) \neq 0$ et on a $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

Démonstration.

Soit x un réel tel que $u(x) > 0$ et J un intervalle de I contenant I.

Soit h un réel non nul tel que $x + h \in J$. On pose $\tau = \dfrac{\sqrt{u(x+h)} - \sqrt{u(x)}}{h}$.

On a $\tau = \dfrac{(\sqrt{u(x+h)} - \sqrt{u(x)})(\sqrt{u(x+h)} + \sqrt{u(x)})}{h(\sqrt{u(x+h)} + \sqrt{u(x)})} = \dfrac{u(x+h) - u(x)}{h(\sqrt{u(x+h)} + \sqrt{u(x)})}$

Examinons la limite de τ lorsque h tend vers 0 :

La fonction u est dérivable donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x)$.

La fonction u est continue (car dérivable) $\lim\limits_{h \to 0} u(x+h) = u(x)$ la fonction racine carré est elle aussi continue d'où $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{(\sqrt{u(x+h)} + \sqrt{u(x)})} = \dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}}$.

On en déduit que τ admet pour limite lorsque h tend vers 0 : $\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$. □

Exemple.

Soit la f fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.
Cette fontion est dérivable sur $\mathbb{R}$ en effet pour tout réel x, $x^2 + 1 > 0$ et on a
$f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

2 2 Dérivée de $x \mapsto (u(x))^n$

Propriété 5

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, n un entier naturel non nul et f la fonction définie sur I par $f(x) = (u(x))^n$.
La fonction f est dérivable en tout réel x de I et on a

$$f'(x) = n\,u'(x)(u(x))^{n-1}$$

Démonstration.
La propriété est vraie pour $n = 1$ en effet pour tout $x \in I$
on a $1 \times u'(x)(u(x))^{1-1} = u'(x)$.
Supposons la propriété vraie pour un entier k et considérons la fonction qui à tout réel x de I associe $u(x)^{k+1}$,
on peut écrire $u(x)^{k+1} = u(x) \times u(x)^k$
on peut dériver cette expression en tant que produit de deux fonctions.
$\left(u(x)^{k+1}\right)' = u'(x) \times u(x)^k + u(x) \times u(x)^{k'}$
On utilise l'hypothèse de récurrence pour obtenir
$\left(u(x)^{k+1}\right)'(x) = u'(x) \times u(x)^k + u(x) \times k \times u'(x)u(x)^{k-1'}$ d'où
$\left(u(x)^{k+1}\right)'(x) = u'(x) \times u(x)^k + k \times u'(x)u(x)^{k'}$ et finalement
$\left(u(x)^{k+1}\right)'(x) = k \times u'(x)u(x)^{k'}$
On peut donc en conclure que pour tout entier naturel n non nul
$\left(u(x)^{k+1}\right)'(x) = n\,u'(x)(u(x))^{n-1}$.

□

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (5x-3)^3$. La fonction f est dérivable et pour tout réel x on a $f'(x) = 3 \times 5 \times (5x-3)^2 = 15(5x-3)^2$.

On a le même type de formule lorsque n est entier relatif non nul cependant la fonction u ne doit pas s'annuller sur I.

Propriété 6

admis
Soit u une fonction définie, dérivable sur I tel que pout tout x de I $u(x) \neq 0$, n un entier relatif non nul et f la fonction définie sur I par $f(x) = (u(x))^n$.
La fonction f est dérivable en tout réel x de I et on a

$$f'(x) = n\,u'(x)(u(x))^{n-1}$$

2 3 Dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$

Propriété 7

Soit a et b deux réels et f une fonction définie et dérivable sur un I.
La fonction $x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable en tout réel x tel que $ax+b \in I$ et on a

$$f'(ax+b) = af'(ax+b)$$

Démonstration. Soit x un réel tel que $u(x) > 0$ et J un intervalle de I contenant I.
Soit h un réel non nul tel que $a(x+h)+b \in J$. On pose $\tau = \dfrac{f(a(x+h)+b) - f(ax+b)}{h}$.

On a $\tau = a \times \dfrac{f(ax+b+ah) - f(ax+b)}{ah}$
Examinons la limite de τ lorsque h tend vers 0 :

La fonction f est dérivable en $ax+b$ donc $\lim\limits_{ah \to 0} \dfrac{f(ax+b+ah)-f(ax+b)}{ah} = f'(ax+b)$.

On en déduit que τ admet pour limite lorsque h tend vers 0 : $a \times f'(ax+b)$. $\square$

2 4 Généralisation

Des exemples précédents se dessine une formule unifiée de la dérivée $x \mapsto f(u(x))$ (fonction composée de u et de f que l'on note $f \circ u$)

$$(f \circ u)' : x \mapsto u'(x) \times f'(u(x))$$

Exemples. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \cos(\sqrt{x})$.
La fonction f est dérivable pour tout $x > 0$ et on a $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x})$.