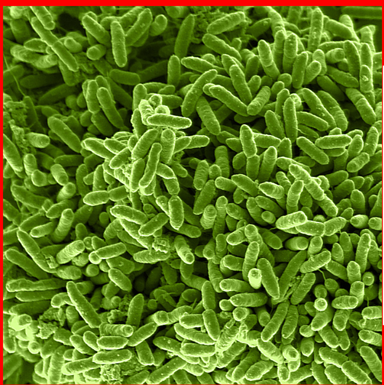
CHAPITRE

6

Fonction exponentielle



Une croissance exponentielle s'exprime en mathématiques :

- pour un phénomène discret sous forme d'une suite géométrique
- pour un phénomène continu sous forme d'une fonction exponentielle.

On démontre qu'une croissance exponentielle conduit la taille de la population à croître de plus en plus vite vers $+\infty$. Ci-contre des cellules *Shewanella putrefaciens* à la surface de particules d'hematites

1 Fonction exponentielle

Propriété 1

Résultat préliminaire.
Si, pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$, alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.
Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = f(x) \times f(-x)$. La fonction ϕ est dérivable et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$\phi(x) = f(x) \times f(-x)$
$\phi'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times [-f'(-x)]$
$\phi'(x) = f'(x) \times f(-x) - f(x) \times f'(-x)$
$\phi'(x) = 0.$

La fonction ϕ est constante sur $\mathbb{R}$, or $\phi(0) = f(0) \times f(0) = 1$, donc pour tout réel x, $\phi(x) = 1$. D'où $f(x) \times f(-x) = 1$, et finalement pour tout réel x, $f(x) \neq 0$. □

Remarque. On en déduit aussi que pour tout réel x, $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

Théorème 1

Il existe une unique fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** et est notée **exp**.

Démonstration.

- L'existence de la fonction exponentielle est admise.
- **Unicité**

  Si g est une fonction telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$, la fonction $h = \dfrac{g}{f}$ est définie (car f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, cf. prop.1) et est dérivable sur $\mathbb{R}$.

  On a $h' = \dfrac{g'f - gf'}{f^2}$ or $f' = f$ et $g' = g$, d'où $h' = 0$ et donc h est constante.

  Pour tout réel x, $h(x) = h(0) = 1$ c'est-à-dire $g(x) = f(x)$ et donc $f = g$.

□

Propriété 2

La fonction exponentielle exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.
Démontrons par l'absurde que pour tout réel x, on a $\exp(x) > 0$.
Supposons qu'il existe un réel a tel que $\exp(a) < 0$.
On sait de plus que $\exp(0) = 1$ et que la fonction exponentielle est continue (car dérivable) donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel b compris entre a et 0 tel que $\exp(b) = 0$.
On obtient une contradiction avec la Propriété 1 par conséquent pour tout réel x, $\exp(x) > 0$.

□

2 Étude de fonction

2 1 Variations

Propriété 3

La fonction exponentielle exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.
La fonction exponentielle est dérivable et par définition $(\exp(x))' = \exp(x)$.
D'après la Prop. 1 $\exp(x) > 0$ pour tout réel x on en déduit que la fonction exponentielle est strictement croissante. □

2 2 Limites

Propriété 4

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad\qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

Démonstration sous forme d'exercice.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f \ : \ x \mapsto e^x - x$.

1. Étudier les variations de f.
2. Calculer $f(0)$ et en déduire le signe de f.
3. En déduire que pour tout réel x que $e^x > x$ puis que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
4. Utiliser $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ pour en déduire que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

□

2 3 Synthèse et courbe représentative

Tableau de variations :

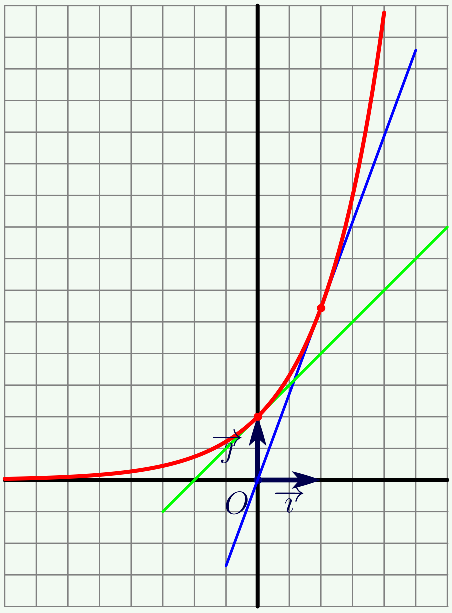
x	$-\infty$		$+\infty$
exp		$+$	
exp	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dans un repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$, la courbe représentative de la fonction exponentielle admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $-\infty$.

Propriété 5

Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle :

- au point d'abscisse 0 est $y = x + 1$.
- au point d'abscisse 1 est $y = ex$.



3 Propriétés algébriques et notation e^x

Théorème 2

Pour tous réels x et y on a :

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

Démonstration. Soit y un réel, comme pour tout réel x on a $\exp(x) \neq 0$ on peut définirla fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$

La fonction f est dérivable et on a :

$f(x) = \dfrac{\exp(x+y)\exp(x) - \exp(x+y)\exp(x)}{\exp(x)^2} = 0$

donc la fonction f est constante or $f(0) = \exp(y)$ d'où pour tout réel x, $\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y)$ par conséquent $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$

□

Par conséquent on en déduit les propriétés suivantes :

Propriété 6

1. Pour tous réels x et y on a :$\exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
2. $\exp(-b) = \dfrac{1}{\exp(b)}$
3. $\exp(kx) = [\exp(x)]^k$, avec $k \in \mathbb{Z}$

On pose $\mathrm{e} = \exp(1)$ on a obtenu grâce à la méthode d'Euler une approximation de e, car $e = \lim(1 + \dfrac{1}{n})^n$

$$\mathrm{e} \simeq 2,71828182845904523536$$

et que pour tout entier k,

$$\exp(k) = \exp(k \times 1) = \exp(1)^k = \mathrm{e}^k$$

on note alors, **par convention**, que

$$\exp(x) = e^x$$

Il a reste à vérifier que les propriétés vues précédemment sont conformes à l'usage de la notation puissance.

Propriété 7

Pour tous réels x, y et entier relatif n :

- $\mathrm{e}^0 = 1$
- $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$
- $\left(\mathrm{e}^x\right)^k = \mathrm{e}^{kx}$
- $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$
- $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$