CHAPITRE

8

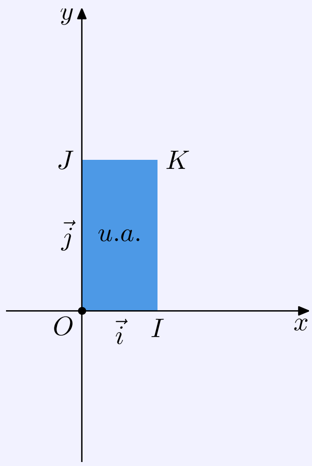
Intégration

Déterminer l'aire d'une zone S délimitée par une courbe est un problème qui nous amène à nous demander ce que représente le concept d'aire. Quelle est par exemple la surface occupée par cette tâche de sang ?

1 Intégrale et aire

Définition 1

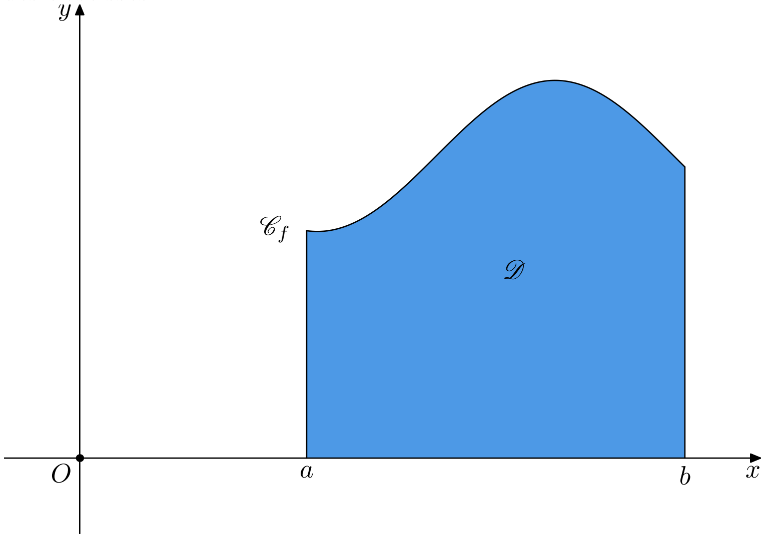
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on appelle unité d'aire, que l'on note $u.a.$, l'aire du rectangle $OIKJ$ où $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$



Le domaine $\mathscr{D}$: soit une fonction définie et çpositive sur un intervalle $[a; b]$.
La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de l'axe des abscisses. L'ensemble $\mathscr{D}$ est constitué des points $M(x, y)$ du plan tels que

$$a \leqslant x \leqslant b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)$$

c'est-à-dire l'ensemble des points du plan qui se trouvent entre la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses.



Définition 2

Soit f une fonction continue et **positive** sur un intervalle $[a; b]$. L'intégrale de f sur $[a; b]$, notée $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, est l'aire du domaine $\mathscr{D}$ situé sous la courbe $\mathscr{C}$.

Remarques.

- a et b sont les bornes d'intégration.
- x est la variable d'intégration, elle est dite muette, d'autres lettres peuvent être utilisées.
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$ dans ce cas, l'aire du domaine est nulle.
- Pour toute fonction continue positive $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est un nombre réel positif ou nul.

Exemple.

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$$

$\displaystyle\int_2^6 f(x)\,dx$ est l'aire du trapèze $ABCD$

soit :

$$\int_2^6 f(x)\,dx = \frac{AD\ +\ BC}{2} \times AB$$

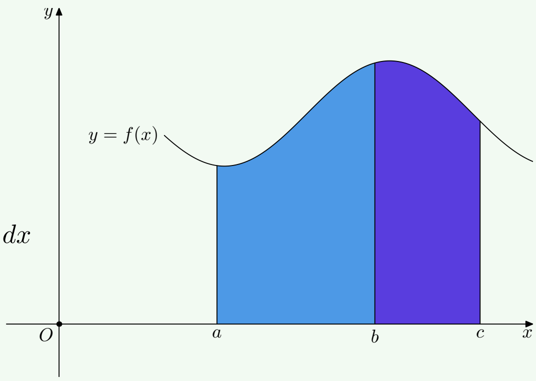
$$\int_2^6 f(x)\,dx = \frac{3\ + 5}{2} \times 4 = 16 \text{ u.a.}$$

Propriété 1

Relation de Chasles

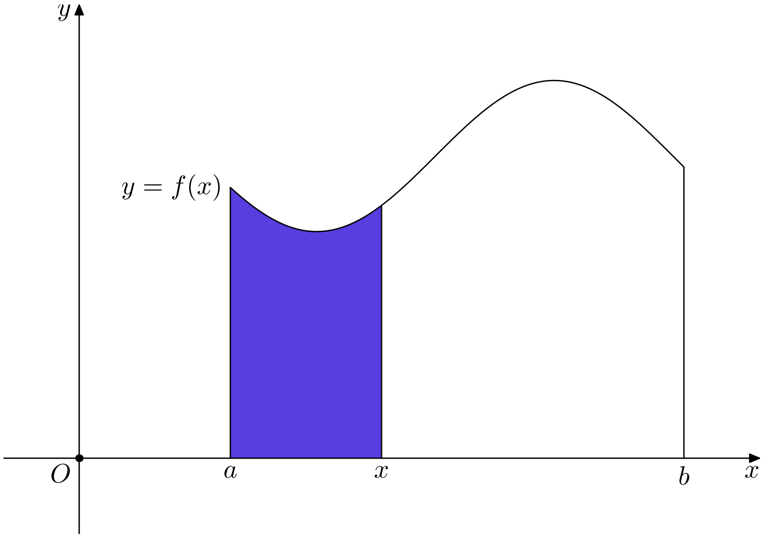
Pour tous réels a, b et c tels que $a \leqslant b \leqslant c$ on a :

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$



2 Fonction définie par une intégrale

Soit f une fonction continue et positive définie sur l'intervalle $[a;b]$ et x un nombre réel quelconque de cet intervalle. L'intégrale $\int_a^x f(t)\,dt$ est l'aire de la partie coloriée en bleue qui dépend de x.



Théorème 1

Si f est une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a;b]$, la fonction F définie sur $[a;b]$ par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

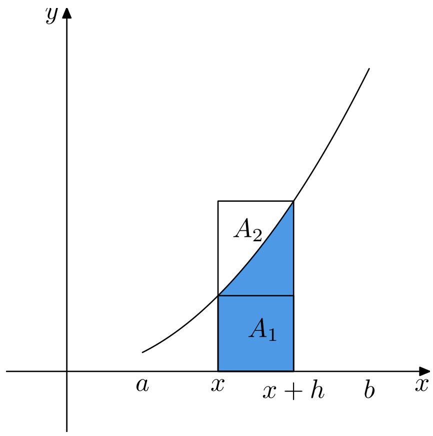
est dérivable sur $[a;b]$ et sa fonction est la fonction f.

Démonstration. On admet le théorème dans le cas général on démontre le théorème uniquement dans la cas d'une fonction f croissante.

Pour x fixé dans l'intervalle $[a;b]$ on calcule le taux de variation $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}$ avec $h \neq 0$ et $x+h \in [a;b]$

- Cas $h > 0$

$F(x+h) = \displaystyle\int_a^{x+h} f(t)\,dt$ est l'aire entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[a;x+h]$.
$F(x) = \displaystyle\int_a^{x} f(t)\,dt$ est l'aire entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[a;x]$.
La différence entre $F(x+h) - F(x) = \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ correspond à l'aire l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[x;x+h]$.



La fonction f est croissante sur $[a;b]$, donc pour tout u compris entre x et $x+h$ on a $f(x) \leqslant f(u) \leqslant f(x+h)$.
L'aire $\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ est comprise entre $h \times f(x)$, l'aire du rectangle A_1, et $h \times f(x+h)$, l'aire du rectangle A_2. D'où :

$$h \times f(x) \leqslant F(x+h) - F(x) \leqslant h \times f(x+h)$$

en divisant l'inégalité par $h > 0$:

$$f(x) \leqslant \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leqslant f(x+h)$$

Comme la fonction f est continue en x, lorsque x tend vers 0, $f(x+h)$ tend vers $f(x)$.
D'après le théorème des gendarmes on en déduit que
$\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$

- Cas $h < 0$: on démontre de même pour $h < 0$ que

$$f(x+h) \leqslant \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leqslant f(x)$$

comme la fonction f est continue en x, lorsque x tend vers 0, $f(x+h)$ tend vers $f(x)$.
D'après le théorème des gendarmes on en déduit que
$\displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$
Conclusion : la fonction F est dérivable pour tout x de $[a;b]$ et $F'(x) = f(x)$

□