CHAPITRE

9

Lois à densité

Une fonction gaussienne est une fonction en exponentielle de l'opposé du carré de l'abscisse ($x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$). Elle a une forme caractéristique de courbe en cloche. L'exemple le plus connu est la densité de probabilité de la loi normale.

1 Variable aléatoire à densité

Soit une expérience aléatoire et son univers associé Ω (ensemble des issues)

1 1 Variable aléatoire continue

Définition 1

Une variable aléatoire est une fonction définie sur Ω et à valeur dans $\mathbb{R}$. On la note X. Elle est dite **continue** si elle peut prendre comme valeur tous les réels d'un intervalle I de R.

Exemples.

- Si on lance deux dés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6, on peut définir une variable aléatoire qui à chaque lancer associe par exemple la somme nombres obtenus. Comme cette variable ne prend que des valeurs finies entières comprises entre 2 et 12, il ne s'agit pas d'une variable aléatoire **continue**, elle est dite **discrète**.
- Si on considère la variable aléatoire X qui, à chaque ampoule basse consommation d'un certain modèle, associe sa durée de vie en heure, cette durée n'est pas forcément un nombre entier d'heure et en théorie on ne connait pas sa durée de vie maximale. Cette variable aléatoire est donc **continue** et l'intervalle I est $[0; +\infty[$.

1 2 Fonction de densité et loi de probabilité

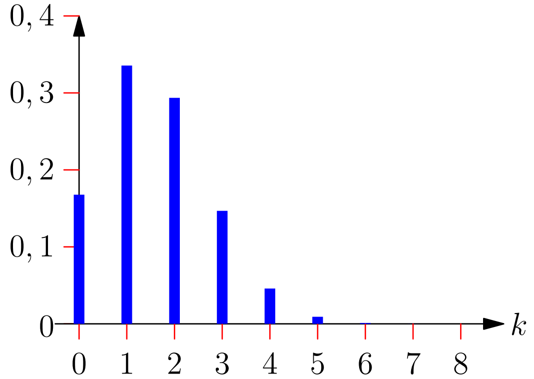
Une fois une variable aléatoire définie on s'intéresse à sa loi de probabilité. Dans le cas d'une variable aléatoire discrète, la loi de probabilité associée est généralement donnée sous la forme d'un tableau. Ou encore à l'aide d'une formule, c'est le cas par exemple pour les variables aléatoires qui suivent la loi binomiale.

Exemples.

- Si on reprend l'exemple de la variable aléatoire discrète X qui associe au lancer de deux dés la somme des deux nombres obtenus.
  La loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-dessous :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

- Si on considère la variable aléatoire Y qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(8; 0, 2)$, on a alors pour tout entier k compris entre 0 et 8, $P(Y=k) = \binom{8}{k} \times 0.2^k \times 0.8^{n-k}$.



Dans le cas d'une variable aléatoire continue, on utilise une fonction définie sur I un intervalle de $\mathbb{R}$. appelée **densité**.

Définition 2

Une fonction f définie sur I est appelée fonction densité, ou densité, si :

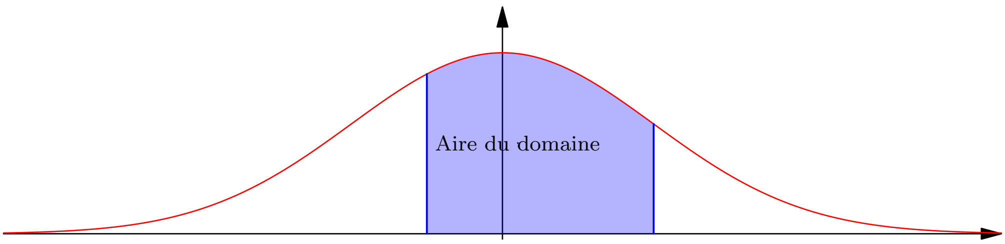
- f est positive, pour tout réel x de I, $f(x) \geqslant 0$;
- f est continue sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points.
- L'aire du domaine $\mathscr{D}$, délimitée sous la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal et l'axe des abscisses est égale à 1.
- On étend cette définition au cas où l'intervalle I est l'ensemble des réels $\mathbb{R}$

Remarques.

- Dans le cas d'une variable aléatoire discrète, la somme des probabilité des évènements $\{k\}$ est égale à 1, ce qui correspond dans le cas des variables aléatoires continues à l'aire du domaine $\mathscr{D}$ est égale à 1.
- Si $I = [a;b]$ l'aire du domaine $\mathscr{D}$ est égale à 1 ce traduit par $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 1$.

Définition 3

loi de probabilité
Soit X une variable aléatoire continue à valeur dans un intervalle I de densité f. La probabilité de l'évènement $\{X \in J\}$, où J est un intervalle de $\mathbb{R}$, est notée $P(X \in J)$ est l'aire du domaine $\{M(x;y); x \in J \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$.



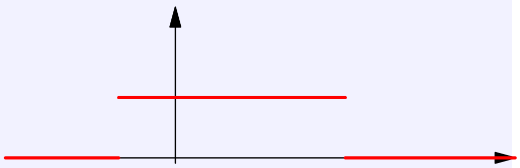
2 Loi uniforme

Définition 4

loi de probabilité
Soit a et b deux réels distincts tels $a < b$.
Dire qu'une variable aléatoire continue X suit une **loi uniforme** sur l'intervalle $[a;b]$ signifie que sa fonction de densité est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On note X suit la loi $\mathscr{U}([a;b])$

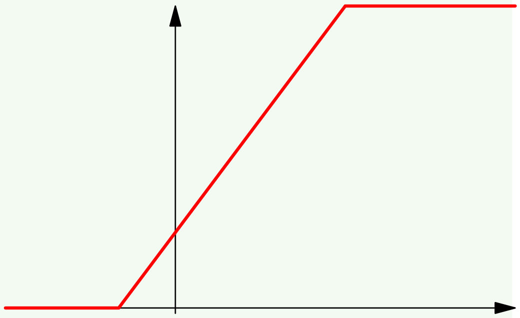


Exemple. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathscr{U}([-1;3])$.
Calculer la probabilité $P(-0.5 < X < 1.5)$

Propriété 1

Si une variable aléatoire suit la loi uniforme $\mathscr{U}([a;b])$, alors **la fonction de répartition** F définie pour tout réel x par $F(x) = P(X \leqslant x)$ est :

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ si } x \in [a;b] \\ 1 \text{ si } x > b \end{cases}$$



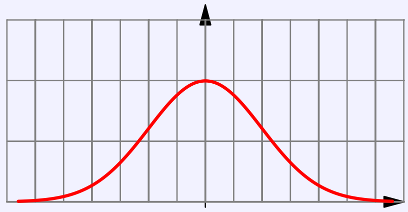
3 Loi normale centrée réduite

Définition 5

Dire qu'une variable aléatoire continue X suit une **loi normale** centrée réduite signifie que sa fonction de densité est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

On note X suit la loi $\mathscr{N}(0;1)$



Cette courbe est connue sous le nom de « gaussienne »ou du fait de sa forme caractéristique de « courbe en cloche ».

Théorème 1

Moivre-Laplace admis

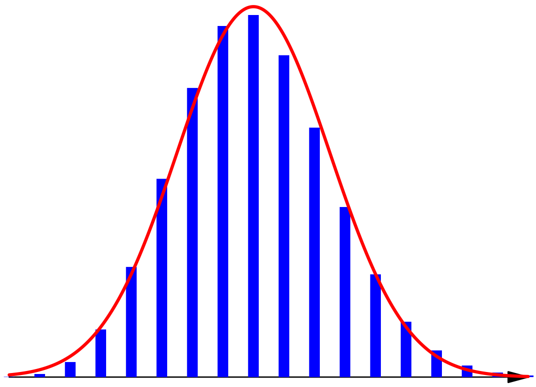
Soit n un entier naturel non nul et p un réel tel que $0 < p < 1$. On considère X_n la variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$ et si Z_n la variable aléatoire définie par :

$$Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

alors tous réels a et b tels que $a < b$ on a :

$$P(a \geqslant X \geqslant b) \text{ tend vers } \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty.$$

Ce théorème justifie que sous certaines conditions sur les paramètres n et p, la probabilité d'un évènement aléatoire asocié à une loi binomiale peut-être approché par une probabilité d'un évènement aléatoire asocié à une loi normale centrée réduite. On dit qu'il s'agit d'une **approximation d'une loi binomiale par une loi normale**.



Propriété 2

Soit X une varaible aléatoire suivant $\mathcal{N}(0,1)$.
Pour tout réel α inclus dans l'intervalle $]0;1[$, il existe un unique réel u_α tel que

$$P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$$

Démonstration. Soit F la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

Cette fonction est dérivable (cf th 1 chap 08) et sa dérivée est $F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

F est donc strictement croissante, deplus $F(0) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{1}{2}$ (symétrie de la courbe en cloche representative de la fonction densité et aire totale =1).
D'après le Théorème valeurs intermédiares (de la bijection), F prend toutes ses valeurs dans l'intervalle $[0;\dfrac{1}{2}[$

$\square$