CHAPTER

Nombres Complexes 2

Dans un cas particulier de la formule d'Euler on trouve dans la même égalité e, i et π : $e^{i\pi} + 1 = 0$. Les lecteurs de The Mathematical Intelligencer l'ont désignée comme la plus belle formule mathématique de tous les temps .

1 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non-nul

1 1 Module d'un nombre complexe

Définition 1

Le module du complexe z d'écriture algébrique $a+ib$ est le réel positif noté $|z|$ tel que
$$|z| = \sqrt{z\ \overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$$
autrement dit $|z|^2 = z\ \overline{z}$.

Remarque. Si a est un réel, $|a| = \sqrt{a\ \overline{a}} = \sqrt{a^2} = |a|$ donc le module de a est bien la valeur absolue de a et la notation utilisée pour le module est cohérente.
La notion de module dans $\mathbb{C}$ généralise donc celle de valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

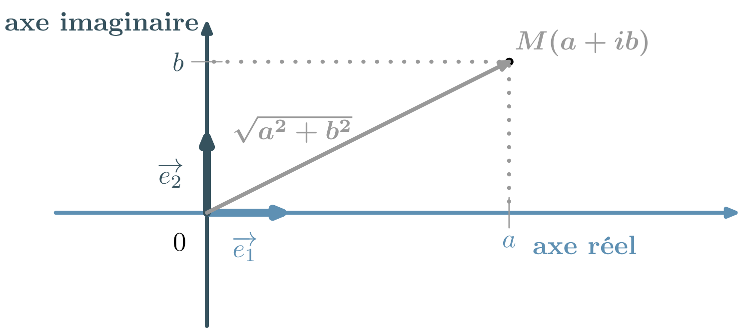
Propriétés du module

Propriété 1

- $|\overline{z}| = |z|$
- $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$
- $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ avec $z_2 \neq 0$

Interprétation géométrique

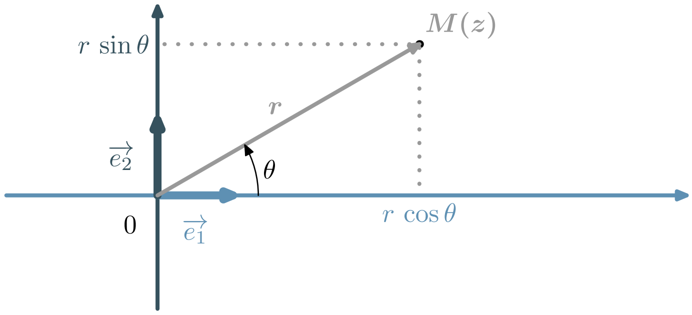
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$, on considère le point M d'affixe z d'écriture algébrique $a+ib$
On a $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ qui n'est autre que la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ c'est-à-dire la distance OM.



1 2 Argument d'un nombre complexe

Définition 2

Dans le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$, soit z un nombre complexe non-nul et M le point du plan d'affixe z.
On appelle argument de z, noté $\arg z$, toute mesure en radians de l'angle de vecteur $(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{OM})$



Remarque. Un nombre complexe non-nul a une infinité d'argument, si θ est un argument de z alors $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est aussi un argument de z.

1 3 Forme trigonométrique

La donnée d'un réel positif r et d'un angle θ permet de définir un unique point M d'affixe $z \neq 0$ du plan complexe tel que $OM = r$ et $(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{OM}) = \theta$.
On en déduit que $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$

Définition 3

Soit z un nombre complexe non-nul. L'écriture $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg z$ est appelée une forme trigonométrique de z.

1 4 Passage forme algébrique ⇔ forme trigonométrique

Soit $z \in \mathbb{C}$ de forme algébrique $a + ib$ et de forme trigonométrique $r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ alors on a d'une part :

Propriété 2

forme algébrique connaissant la forme trigonométrique
$a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$.

et d'autre part $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Si z est *non nul*, son module $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ sera non nul également. Ainsi, on peut écrire z sous la forme :

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \mathrm{i}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right. \\ z &= r\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \mathrm{i}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\ z &= r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)) \end{aligned}$$

On en déduit

Propriété 3

forme trigonométrique en fonction de la forme algébrique
$\cos(\theta) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Ainsi, connaissant a et b, on peut obtenir le module et un argument de $a + ib$. On obtiendra une mesure exacte de θ si $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont des valeurs connues comme $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1, etc.
Sinon, on obtiendra une valeur approchée à l'aide de la calculcatrice.

1 5 Opération sur les formes trigonométriques

Soit $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta')$, alors

$$zz' = rr'(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + \mathrm{i}(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta')$$

On reconnaît les formules d'addition, donc on en déduit :

$$zz' = z = rr'(\cos(\theta+\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta+\theta)')$$

on a donc

Propriété 4

argument d'un produit
$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$

On peut démontrer les propriétés suivantes :

Propriété 5

Propriétés algébriques des arguments

- $\arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg(-z) = \pi + \arg(z)\ [2\pi]$

En particulier, la formule concernant z^n on peut écrire

Théorème 1

Formule de Moivre Hors-Programme

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$$

Remarque.

- Les formes trigonométriques sont adaptés aux produits de complexes ;
- Les formes algébriques sont adaptées aux sommes de complexes.

2 Forme Exponentielle

Soit f la fonction $f : \theta \mapsto \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ avec θ un nombre réel.
Le nombre complexe $f(\theta)$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ.
Le nombre complexe $f(\theta+\theta') = \cos(\theta+\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta+\theta')$ a pour module 1 et pour argument $\theta+\theta'$.
Or le nombre $f(\theta)\times f(\theta')$ a aussi pour module 1 et pour argument $\theta+\theta'$
car, pour z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls, on a $|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|$ et $\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.
On en déduit que $f(\theta+\theta') = f(\theta)\times f(\theta')$ de plus $f(0) = 1$.
La fonction f ainsi définie vérifie les propriétés de la fonction exponentielle, ce qui mène à la notation suivante :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$

Propriété 6

Tout nombre complexe non nul de module r et d'argument θ peut s'écrire :

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \text{ ou } z = r(cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta),$$

et réciproquement, tout nombre complexe qui s'écrit :

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \text{ ou } z = r(cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta),$$

avec r un réel strictement positif, a pour module r et pour argument $\theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

La forme exponentielle complexe possède des propriétés analogues à la fonction exponentielle réelle.

Propriété 7

Soit r et r' des réels strictement positifs, θ et θ' des réels quelconques.

1. $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = rr'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$,
2. $\dfrac{1}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \dfrac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$,
3. $\dfrac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \dfrac{r}{r'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$.

C'est Leonhard Euler (1707-1783) qui donnera cette relation qui à la remarquable propriété de relier les grandes branches des mathématiques l'analyse, l'algèbre et la géométrie.

Propriété 8

Formules d'EULER
Pour tout nombre réel θ, on a:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta, \text{ d'où } \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta.$$

En particulier

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$$

Exemples : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = \cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$
On en déduit par addition et soustraction des égalités précédentes les résultats suivants.

Propriété 9

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$$

3 Applications en géométrie

Dans le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, on considère les points A, B, C et D quatre points deux à deux distincts d'affixes respectivement z_A, z_B,z_C et z_D.
On a les relations suivantes :

Théorème 2

1. $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) =$
2. $AB = |z_B - z_A|$
3. $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$
4. $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ si et seulement si $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \theta[2\pi]$ et $\dfrac{CD}{AB} = r$

Démonstration.

□

4 Cercle trigonométrique et angles remarquables