CHAPITRE

13

Géometrie Vectorielle

Oscar Niemeyer Soares est un architecte et un designer brésilien. Il est un des plus célèbres architectes brésiliens. Son œuvre, qui s'inscrit étroitement dans le mouvement du style international, tient une place majeure dans l'histoire de l'architecture moderne. Il est surtout connu pour la construction de Brasilia au Brésil. Ci-contre le congrès national du Brésil.

1 Caractérisation d'un plan

1 1 Notion de vecteur de l'espace

Définition 1

- Un vecteur de l'espace est défini par une direction un sens et une longueur (norme).
- On définit le produit d'un vecteur par un réel k comme en géométrie plane.

Propriété 1

- Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si,et seulement si, $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$ où k est un réel. Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.
- Les points A, B e C sont alignés si,et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si,et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

1 2 Plan de l'espace

Propriété 2

Soit deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires et A un point de l'espace.
L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$, avec x et y deux réels quelconques, est un plan passant par A.

Remarque. Un plan est entièrement déterminer par un point et deux vecteurs non colinéaires.

Démonstration. Soit B et C deux points tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires, pour tout point M du plan (ABC), il existe des réels x et y tels quelconques
$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.
Réciroquement, soit x et y deux réels tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.
Le point R défini par $\overrightarrow{AR} = x\overrightarrow{u}$ appartient à la droite (AB), donc au plan (ABC).
On a : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RM}$ d'où $\overrightarrow{RM} = y\overrightarrow{v}$.
M appartient donc à la parallèle à (AC) passant par R qui est incluse dans le plan (ABC), donc M appartient au plan (ABC).

□

2 Vecteurs coplanaires

Définition 2

Trois vecteurs sont dits coplanaires s'ils possédent un repésentant dans un même plan.
Autrement dit si leurs réprésentants de même origine A ont leurs extrémités dans un même plan passant par A

Théorème 1

Tout vecteur de l'espace peut se décomposer suivant trois vecteurs non coplanaires.

On dit que trois vecteurs de l'espace non coplanaires définissent une base de l'espace.

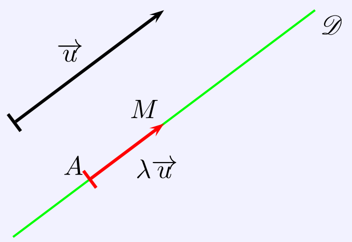
Propriété 3

- Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si,et seulement si, il existe trois réels a, b et c non tous nuls tels $a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v}+c\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si,et seulement si, l'égalité $a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v}+c\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}$ signifie que $a=b=c=0$.

3 Représentation paramétrique d'une droite et d'un plan

Définition 3

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point et $\overrightarrow{u}(a,b,c)$ un vecteur non nul. La droite $\mathscr{D}$ passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{u}$.



Conséquence immédiate : la droite $\mathscr{D}$ peut être représentée par un système paramétrique.

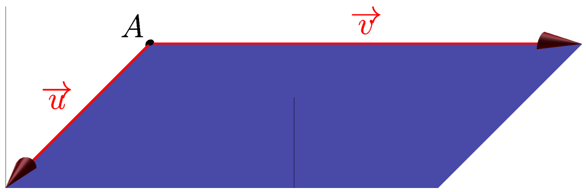
Propriété 4

Un point $M(x,y,z)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(a,b,c)$ si, et seulement si, il existe un réel t tel que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_A+at \\ y & = & y_A+bt \\ z & = & z_A+ct \end{array}\right.$$

Ce système est une **représentation paramétrique** de la droite $\mathscr{D}$. Le paramètre est t.

De même un plan $\mathscr{P}$ est entièrement définie par la donnée : d'un point A et de deux vecteurs non-colinéaires (on dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ forme une base du plan $\mathscr{P}$).
Un point $M(x;y;z)$ appartient au plan $\mathscr{P}$ signifie que $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{u}+t'\overrightarrow{v}$



Propriété 5

Un point $M(x,y,z)$ appartient au plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}(a,b,c)$ et $\overrightarrow{v}(\alpha,\beta,\gamma)$ si, et seulement si, il existe deux réels t et t' tels que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_A+at+\alpha t' \\ y & = & y_A+bt+\beta t' \\ z & = & z_A+ct+\gamma t' \end{array}\right.$$

Ce système est une **représentation paramétrique** du plan $\mathscr{P}$ de paramètre est t et t'.