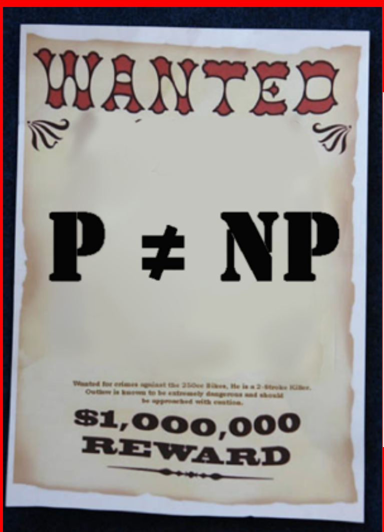
CHAPITRE

15 Croissances comparées



En mathématiques le problème P=NP est un problème non résolu, et est considéré par de nombreux chercheurs comme un des plus importants problèmes du domaine. Il s'agit de savoir si la classe de complexité P des problèmes de décision admettant un algorithme de résolution s'exécutant en temps polynomial sur une machine de Turing est équivalente à la classe de complexité NP des problèmes de décision dont la vérification du résultat, une fois celui-ci connu, demande un temps polynomial. Un algorithme qui demande un temps d'exécution polynomial est généralement considéré comme « rapide »par rapport à un temps d'exécution exponentiel.

La **comparaison asymptotique** est une méthode consistant à étudier le comportement d'une fonction au voisiange de l'infini par rapport à des fonctions de référence, le plus souvent des monômes, $x \mapsto x^n$.

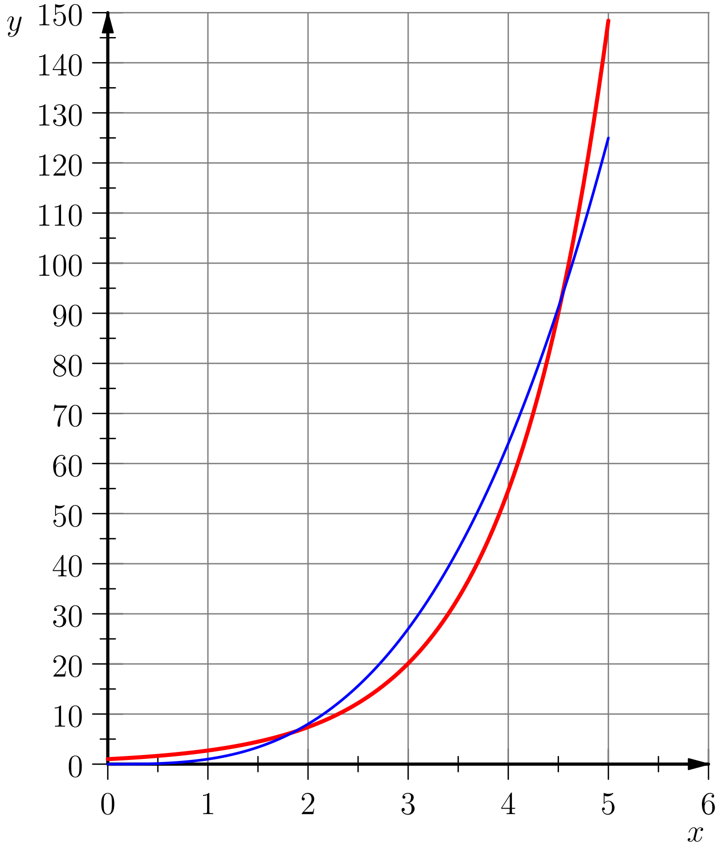
1 Fonction exponentielle $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et fonction puissance $x \mapsto x^n$

Lorsque x tend vers $+\infty$, les limites des fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto x$ sont toutes deux $+\infty$. La limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ est à priori une forme indéterminée mais une étude approfondie des fonctions exponentielle et puissance permettent de lever cette indétermination et d'établir les résultats suivants :

Propriété 1

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$ pour tout entier naturel n
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^n\mathrm{e}^x = 0$ pour tout entier naturel n

Remarque. On dit que la fonction exponentielle « l'emporte »sur les fonctions puissances de x. On a représenté Ci-dessous les fonctions
$x \mapsto \mathrm{e}^x$ en rouge et $x \mapsto x^3$ en bleu. Pour x assez grand la croissance de l'expoentielle dépasse très largement celle de la fonction cube et plus généralement de toutes les puissances.



Démonstration.
Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{2}x^2$.

1. Déterminer $f''(x)$, ou f'' désigne la dérivée seconde de f.
2. Après avoir étudier le signe de f'', déterminer les variations de f'.
3. Calculer $f'(0)$ et en déduire le signe de f'.
4. Étudier les variations de f, puis après avoir calculer $f(0)$ en déduire le signe de f.
5. Montrer que pour tout $x \in [0;+\infty[$ on a :
$$\frac{x}{2} \leqslant \mathrm{e}^x$$
6. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

□

On démontre aussi que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$ à l'aide de l'égalité :
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = \lim_{x\to+\infty} -x\mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{\mathrm{e}^x}$
Or on a démontré que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ d'où $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$

2 Fonction logarithme $x \mapsto \ln x$ et fonction puissance $x \mapsto x^n$

Propriété 2

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ pour tout entier naturel n non-nul
- $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x\ln x = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^n\ln x = 0$ pour tout entier naturel n non-nul.

Remarque. On dit que « x l'emporte sur $\ln x$ »au voisinage de $+\infty$.

3 Approximation affine

Propriété 3

On a $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$ autrement dit $\mathrm{e}^x = 1 + x + x\varepsilon(x)$ avec $\displaystyle\lim_{x\to0} \varepsilon(x) = 0$

Conséquence : lorsque x est proche de 0 on a $\mathrm{e}^x \approx 1 + x$. On dit que $x \mapsto 1 + x$ est une approximation affine de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ au voisinage de 0.

Démonstration.
La fonction exponentielle est dérivable en 0 et on a la dérivée vaut 1 en 0 d'où $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x} = \mathrm{e}^0 = 1$

□

Propriété 4

On a $\displaystyle\lim_{h\to0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ autrement dit $\ln(1+h) = h + h\varepsilon(h)$ avec $\displaystyle\lim_{h\to0} \varepsilon(h) = 0$

Conséquence : lorsque h est proche de 0 on a $\ln(1+h) \approx h$. On dit que $h \mapsto h$ est une approximation affine de la fonction $h \mapsto \ln(1+h)$ au voisinage de 0.

Démonstration. La fonction ln est dérivable en 1 et on a $\ln'(1) = 1$ d'où $\displaystyle\lim_{h\to0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = \ln'(1)$ soit $\displaystyle\lim_{h\to0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$. □