CHAPITRE

16

Lois exponentielles et lois normales

L'ampoule de Livermore ou Livermore Centennial Light Bulb, est une ampoule électrique d'une puissance de quatre watts, qui brillerait depuis 1901. Elle serait ainsi la plus vieille lampe encore en fonctionnement au monde. Installée dans la caserne des pompiers de Livermore en Californie, elle n'a presque jamais été éteinte. La durée de vie des produits manufacturés est l'objet d'études et débats. L'obsolècence programmée, perçue ou réelle, sont sources de polémiques.

1 Lois exponentielles

« Une loi exponentielle modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, ou sans vieillissement, ou sans usure : la probabilité que le phénomène dure au moins s+t heures sachant qu'il a déjà duré t heures sera la même que la probabilité de durer s heures à partir de sa mise en fonction initiale. En d'autres termes, le fait que le phénomène ait duré pendant t heures ne change rien à son espérance de vie à partir du temps t. » `http://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_exponentielle`

Propriété 1

Soit λ un réel strictement positif.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \text{ si } x \in [0;+\infty[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$
est une densité de probabilité.

Rappel : Une fonction f définie sur I est appelée fonction densité, ou densité, si :

- f est positive, pour tout réel x de I, $f(x) \geqslant 0$;
- f est continue sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points.
- L'aire du domaine $\mathscr{D}$, délimitée sous la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal et l'axe des abscisses est égale à 1 (c-à-d $\displaystyle\int_I f(x)dx = 1$).
- On étend cette définition au cas où l'intervalle I est l'ensemble des réels $\mathbb{R}$

Définition 1

Soit λ un réel strictement positif et X une variable aléatoire réelle.
On dit que X suit la loi exponentielle de paramètre λ lorsque X est à valeurs dans $[0;+\infty[$ et suit la loi à densité continue f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \text{ si } x \in [0;+\infty[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Théorème 1

La fonction de répartition d'une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = P(X < x) = \int_0^x f(t)dt = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \text{ si } x \in [0;+\infty[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

.

Conséquences : Soit a, b et c trois réels positifs avec $a \leqslant b$ on a :

- $P(X \geqslant c) = 1 - P(X < c) = 1 - (1 - e^{-\lambda c}) = e^{-\lambda c}$
- $P(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt = -e^{-\lambda b} - (-e^{-\lambda a}) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$

Propriété 2

Espérance
L'espérance d'une d'une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ est : $E(x) = \dfrac{1}{\lambda}$

Démonstration. On sait que $E(X) = \lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_0^t t \times \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} dt$
Pour calculer cette intégrale on doit réussir à déterminer une primitive de la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(t) = \lambda \times t\mathrm{e}^{-\lambda t}$.
On suppose qu'une primitive de g sera de la forme $G(t) = (at+b)\mathrm{e}^{-\lambda t}$ avec a et b deux réels à déterminer.
On dérive G on obtient $G'(t) = a\mathrm{e}^{-\lambda t} + (at+b)(-\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t})$ soit
$G'(t) = (-\lambda at - \lambda b + a)\mathrm{e}^{-\lambda t}$ or $G'(t) = g(t) = \lambda \times t\mathrm{e}^{-\lambda t}$ pour tout $t > 0$
On en déduit par identification que :
$$\begin{cases} -\lambda a = \lambda \\ a - \lambda b = 0 \end{cases}$$
soit $a = -1$ et $b = -\dfrac{1}{\lambda}$.
Maintenant qu'on a une primitive de la fonction g on peut écrire :
$$\int_0^x t \times \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} dt = \left[(-t - \frac{1}{\lambda})\mathrm{e}^{-\lambda t} \right]_0^x = (-x - \frac{1}{\lambda})\mathrm{e}^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}$$
Or lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x - \dfrac{1}{\lambda})\mathrm{e}^{-\lambda x} = 0$ et donc
$E(X) = \lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_0^t t \times \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} dt = \dfrac{1}{\lambda}$.

□

Définition 2

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[0; +\infty[$ qui suit une loi à densité continue. On dit que X suit une loi de durée de vie sans vieillissement ou sans mémoire lorsque : pour tous réels t et h strictement positifs tels que $P(X > t) \neq 0$, $P_{X<t}(X > t + h) = P(X > h)$.

Propriété 3

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi à densité continue.
Les propriétés suivantes sont équivalentes

1. X suit une loi exponentielle de paramètre λ.
2. X suit une loi de durée de vie sans vieillissement.

2 Lois normales cas général

Définition 3

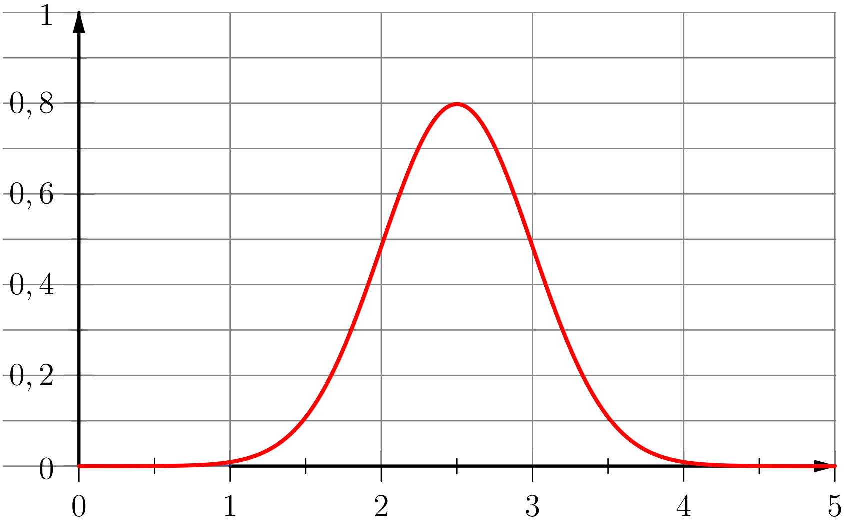
Dire qu'une variable aléatoire X suit une loi normale de $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ signifie que la variable aléatoire $T = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

La densité associée à la variable aléatoire X est une fonction de densité dont l'expression est similaire à celle de la loi normale centrée réduite.

Propriété 4

Soit une variable aléatoire X suivantt une loi normale de $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ a pour fonction de densité
la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma}}$

Ci-dessous la représentation d'une loi normale $\mathcal{N}(2.5, 0.5^2)$

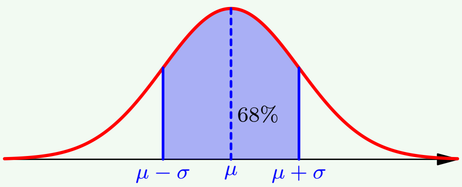


Remarque. On remarque que la courbe en cloche admet un axe de symétrie $x = \mu$, en effet pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x - \mu) = f(x + \mu)$.

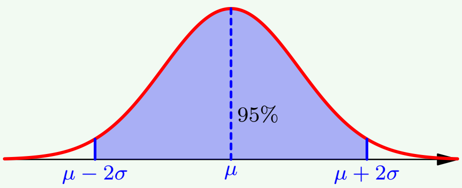
Propriété 5

Soit une variable aléatoire X suivant une loi normale de $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, on a :

- $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma)$ est approximativement égale à $0,68$



- $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma)$ est approximativement égale à $0,95$



- $P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma)$ est approximativement égale à $0,99$.