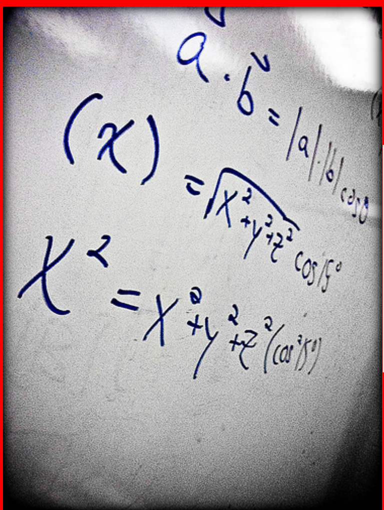
CHAPITRE

17

Produit scalaire dans l'espace et applications



Le produit scalaire de deux vecteurs est une opération qui à eux vecteurs associe un réel, un scalaire. On utilise le terme produit car il possède certains proprietes analogues au produit des réels. Le produit scalaire est aussi utilisé en mécanique, le travail d'une force est le produit scalaire de cette force et du vecteur déplacement.

1 Produit scalaire dans l'espace

Définition 1

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace, le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est :

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et/ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ sinon, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est l'angle entre les vecteurs dans un plan contenant deux de leurs représentants.

Toutes les règles de calculs vues dans le plan s'étendent à l'esapace.

Propriété 1

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ deux vecteurs de l'espace et λ un réel.

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$
- Communtativité : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$
- Distributivité par rapport à l'addition : $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$
- associativité $(\lambda \overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot (\lambda \overrightarrow{v}) = \lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$

Lorsqu'on munit l'espace d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on a $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ et $\overrightarrow{u}(x', y', z')$ c'est-à-dire $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}$.
En appliquant les règles de caluls du produit scalaire et en exploitant le fait que le repère orthonormé soit :
$\|\overrightarrow{i}\| = \|\overrightarrow{j}\| = \|\overrightarrow{k}\| = 1$ et $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = 0$; $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{k} = 0$ et $\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} = 0$
on obtient une expression analityque du produit scalaire.

Propriété 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$,soit les vecteurs $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ et $\overrightarrow{u}(x', y', z')$ on a :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$$

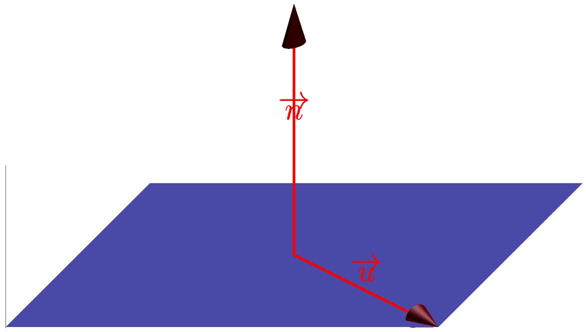
2 Applications : Vecteur Normal et équation cartésienne de plan

2 1 Vecteur Normal

Définition 2

soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace et $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul de l'espace.
Dire que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ signifie que $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à tout vecteur admettant un représentant dans $\mathscr{P}$.
C'est-à-dire pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ admettant un repéseentant dans $\mathscr{P}$:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$



Théorème 1

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan $\mathscr{P}$, s'il orthogonal au moins à deux vecteurs non colinéaires de $\mathscr{P}$

Démonstration. On note $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathscr{P}$, on sait que $\vec{n}$ à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ c'est-à-dire :
$\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ et $\vec{n}\cdot\vec{v}=0$.
Soit $\vec{w}$ un vecteur de $\mathscr{P}$, comme $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires il existe α et β tels que $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$.
On calcule donc

$$\begin{array}{l}\vec{n}\cdot\vec{w}=\vec{n}\cdot(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})\\ \vec{n}\cdot\vec{w}=\alpha\vec{n}\cdot\vec{u}+\beta\vec{n}\cdot\vec{v}\\ \vec{n}\cdot\vec{w}=0\end{array}.$$

On en déduit que $\vec{n}$ est orthogonal à n'importe quel vecteur $\vec{w}$ de $\mathscr{P}$, donc $\vec{n}$ est orthogonal au plan $\mathscr{P}$ □

Remarque. Une droite $\mathscr{D}$ est orthogonal à un plan $\mathscr{P}$ si l'un de ses vecteurs directeurs est normal au plan $\mathscr{P}$.

2 2 Équation cartésienne de plan

Théorème 2

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soit A un point, un vecteur $\vec{n}(a,b,c)$ non nul et $\mathscr{P}$ le plan passant par A de vecteur normal $\vec{n}$.
Le plan $\mathscr{P}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$, avec d un réel à déterminer.

Démonstration.
Un point $M(x,y,z)\in\mathscr{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ d'où

$$\begin{array}{l}a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0\\ ax+by+cz-(ax_A+by_A+cz_A)=0\end{array}$$

avec $d=-(ax_A+by_A+cz_A)$ on a une équation cartésienne de la forme
$ax+by+cz+d=0$ □

Exemple. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{Q}$ passant par $A(1,0,1)$ de vecteur normal $\vec{n}(-2,0,3)$
On a $\mathscr{Q}\ :\ -2x+3z-1=0$

Propriété 3

Pour tous réels a, b, c et d non tous nul, l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan admettant le vecteur $\vec{n}(a,b,c)$ comme vecteur normal.

2 3 Parrallélisme Orthogonalité

Propriété 4

- Deux plans sont perpendiculaires si un vecteur de l'un est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de l'autre.
- Deux plans sont perpendiculaires si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur orthogonal de l'autre.

Propriété 5

Deux plans sont paralléles si leurs vecteurs normaux respectifs sont colinéaires.