Expression du terme de rang n d'une suite récurrente

Inspiré du sujet 001

Exercice 1

Soit(u_n) une suite récurrente définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + 2n + 1 \end{cases}$$

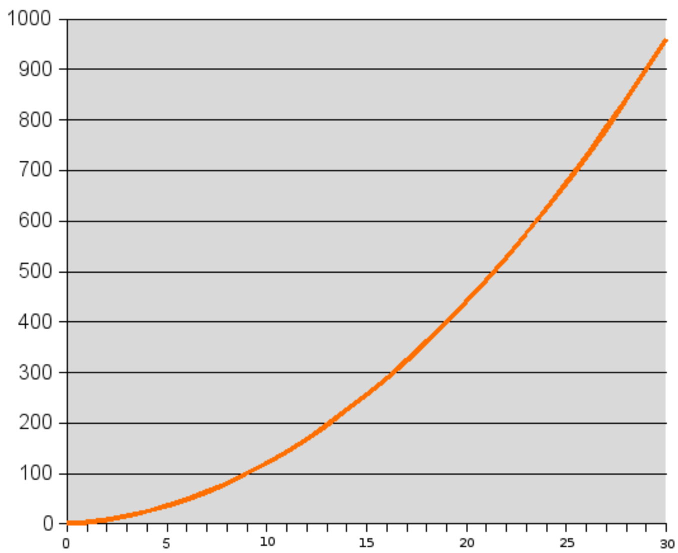
1. À l'aide d'un tableur calculer les termes pour $0 \leq n \leq 30$ de la suite.
2. Représenter graphiquement la suite.
3. Conjecturer l'expression explicite de u_n en fonction de n.
4. Démontrer cette conjecture à l'aide d'un raisonnement par réccurence.

Correction

1. On utilise un tableur, OpenCalc de la suite OpenOffice par exemple `http://fr.openoffice.org/`, on réalise la feuille de calculs `http://akbida.free.fr/ressources/epreuve_pratique/sujet001.ods`.
   Dans la cellule **A2** on saisit 0 puis on étire le contenu vers le bas jusqu'à la cellule **A32**.
   Dans la cellule **B2** qui correspond à u_0 on saisit 0, puis dans **B3** on applique la formule de récurrence, on saisit **=B2+2*A3+1** que l'on étire jusqu'à la cellule **B32**.

	A	B
1	**Rang** n	**Terme** u_n
2	0	1
3	1	4
4	2	9
5	3	16
6	4	25
7	5	36
8	6	49
⋮	⋮	⋮
32	30	961

2. En utilisant les fonctions graphiques du tableur on obtient une parabole :



3. La parabole obtenue semble sugérer que $u_n = f(n)$ avec f un polynôme du second degré, on peut penser à $u_n = (n+1)^2$. À l'aide du tableur on vérifie si cette hypothèse est plausible. Dans la colonne C on calcule $(n+1)^2$, on saisit dans la cellule **C2** la formule **=(A2+1)^2** que l'on étire vers le bas jusqu'à la cellule **C32**.

	A	B	C
1	**Rang** n	**Terme** u_n	$(n+1)^2$
2	0	1	1
3	1	4	4
4	2	9	9
5	3	16	16
6	4	25	25
7	5	36	36
8	6	49	49
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
32	30	961	961

4. On veut démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = (n+1)^2$.
Pour $n = 0$ on a $u_0 = 1$ donc l'égalité est vérifiée pour $n = 0$.
Supposons que pour un entier n on a $u_n = (n+1)^2$,
pour $n+1$ on a

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n + 2(n+1) + 1 \\
u_{n+1} &= (n+1)^2 + 2n + 2 + 1 \\
u_{n+1} &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 \\
u_{n+1} &= n^2 + 4n + 4 \\
u_{n+1} &= (n+2)^2
\end{aligned}$$

donc l'égalité est vérifiée pour l'entier $n+1$.
On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = (n+1)^2$.