Orthocentre

Inspiré du sujet 013

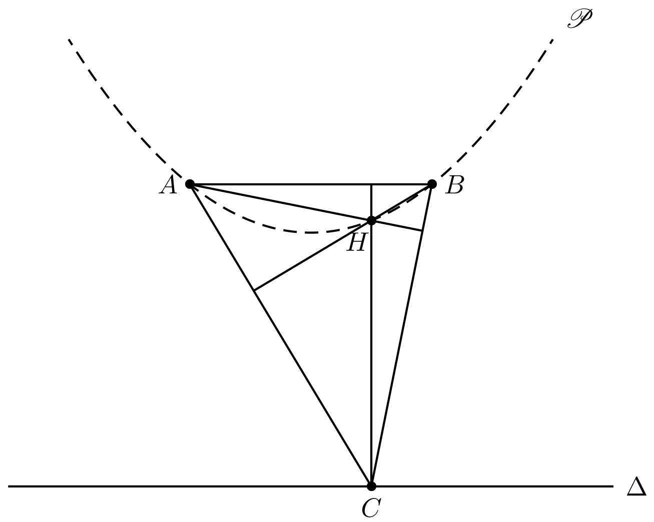
Exercice 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(-2; 0)$, $B(2; 0)$ et la droite Δ d'équation $y = -5$.
Soit C un point de Δ, et H l'orthocentre du triangle ABC.

1. Construire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. Visualiser le lieu que décrit H lorsque C décrit la droite Δ .
3. Caractériser le lieu obtenu.

Correction

1. En utilisant le logiciel libre Geogebra (`http://www.geogebra.at`), on réalise simplement la figure demandée `http://akbida.free.fr/ressources/epreuve_pratique/sujet013.html`
2. Pour visualiser le lieu il y a deux méthodes :
   (a) à l'aide d'un clic droit sur le point H puis sélectionner *Trace activée*, il ne reste plus qu'à déplacer le point C sur la droite Δ ;
   (b) sélectionner la fonction Lieu, cliquer sur H puis sur C, le lieu s'affiche.



3. Le lieu que décrit H lorsque C décrit Δ est la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = \frac{1}{5}(x^2 - 4)$.
   Démonstration :
   On a $C(x; -5)$ avec x un réel, la droite Δ est parallèle à (AB) l'axe des abscisses.
   Les points H et C ont donc les mêmes abscisses, d'où $H(x; y)$.
   On sait que H est l'orthocentre du triangle ABC donc $(AH)\perp(BC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$
   or $\overrightarrow{AH}(x + 2; y)$ et $\overrightarrow{BC}(x - 2; -5)$

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\
&(x + 2)(x - 2) - 5y = 0 \\
&y = \frac{1}{5}(x^2 - 4)
\end{aligned}$$

Si H est l'orthocentre du triangle ABC alors H appartient à la parabole d'équation $\mathscr{P}\ :\ y = \frac{1}{5}(x^2 - 4)$.

Réciproquement :

soit $H(x;y)$ un point de $\mathscr{P}\ :\ y=\dfrac{1}{5}(x^2-4)$, et C le projeté orthogonal de H sur Δ on a $C(x;-5)$.

On a $\overrightarrow{AH}(x+2;y)$, $\overrightarrow{BH}(x-2;y)$, $\overrightarrow{BC}(x-2;-5)$ et $\overrightarrow{AC}(x+2;-5)$

$$\begin{array}{lcl}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=(x+2)(x-2)-5y & \text{et} & \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=(x-2)(x+2)-5y\\ \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0 & \text{et} & \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\end{array}$$

donc que $(AH)\perp(BC)$ et $(BH)\perp(AC)$, le point H appartient à deux hauteurs du triangle ABC c'est donc l'orthocentre.

Si $H(x,y)$ appartient à la parabole d'équation $\mathscr{P}$ alors H est l'orthocentre du triangle ABC
avec $C(x;5)\in\Delta$