Barycentre

Inspiré du sujet 026

Exercice 1

Soit A,B et C trois points du plan non alignés. Pour tout réel k de l'intervalle $[-1;1]$ on considère G_k le barycentre des points pondérés $(A;1-k)$, $(B;\frac{k}{2})$, et $(C;\frac{k}{2})$.

1. Justifier l'existence de G_k pour tout $k \in [-1;1]$.
2. Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
3. Conjecturer le lieu décrit par G_k quand k décrit $[-1;1]$.
4. Démontrer la conjecture énoncée.

Correction

1. On calcule $1-k+\frac{k}{2}+\frac{k}{2}=1$ puisque la somme des coefficients est différente de 0, le barycentre G_k des points pondérés $(A;1-k)$, $(B;\frac{k}{2})$ existe.
2. À l'aide du logiciel libre Geogebra (`http://www.geogebra.at`), on réalise la figure demandée `http://akbida.free.fr/ressources/epreuve_pratique/sujet026.html`.
   - Créer un curseur c'est-à-dire un nombre que l'on fera varier de -1 à 1 ;
   - on renomme le nombre a en k ;
   - on construit les trois A,B et C ;
   - pour construire le barycentre G_k on utilise la relation vectorielle $\overrightarrow{AG}=\frac{k}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{2}\overrightarrow{AC}$:
     - ⋆ on crée $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ pour cela on utilise l'outil *Vecteur défini par deux points*
     - ⋆ on saisit dans la barre de commande w=k/2*(u+v) ce qui correspond à $\overrightarrow{w}=\frac{k}{2}(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})$;
     - ⋆ on construit l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{w}$ on utilise l'outil *Translation (Objet-vecteur)* ;
     - ⋆ on renomme le point obtenu G.
3. Pour conjecturer le lieu décrit par G_k quand k décrit $[-1;1]$, on active la trace du point G (clic droit sur G puis *Trace activée*).
   On pose I le milieu du segment $[BC]$ et I' le symétrique de I par rapport à A.
   Le lieu décrit par G_k est le segment $[II']$.
4. On sait que

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG} &= \frac{k}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{2}\overrightarrow{AC}\\
\overrightarrow{AG} &= \frac{k}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\\
\overrightarrow{AG} &= \frac{k}{2}(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC})\\
\overrightarrow{AG} &= \frac{k}{2}(2\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC})\\
\overrightarrow{AG} &= \frac{k}{2}(2\overrightarrow{AI})\\
\overrightarrow{AG} &= k\overrightarrow{AI}
\end{aligned}$$

   On a $\overrightarrow{AG}=k\overrightarrow{AI}$ et k varie de -1 à 1 donc le barycentre G_k décrit le segment $[II']$.