PGCD

Inspiré du sujet 029

Exercice 1

Pour tout n entier naturel, on considère les entiers $a_n = 2n+3$ et $b_n = 5n+1$.
On cherche à déterminer pour quelles valeurs de n le PGCD(a_n ;b_n)=13.

1. À l'aide d'un tableur, calculer le PGCD(a_n ;b_n) pour $0 \leq n \leq 100$.
2. Conjecturer les valeurs de n pour lesquelles PGCD(a_n ;b_n)=13.
3. Démontrer la conjecture.

Correction

1. On utilise un tableur, OpenCalc de la suite OpenOffice par exemple (`http://fr.openoffice.org/`), on réalise la feuille de calculs `http://akbida.free.fr/ressources/epreuve_pratique/sujet029.ods`.
   Dans la cellule **A2** on saisit 0 puis on étire le contenu vers le bas jusqu'à la cellule **A102**.
   Dans la cellule **B2** on saisit **=2*A2+3** que l'on étire jusqu'à la cellule **B102**.
   Dans la cellule **C2** on saisit **=5*A2+1** que l'on étire jusqu'à la cellule **C102**.
   Dans la cellule **D2** on saisit **=PGCD(B2 ;C2)** que l'on étire jusqu'à la cellule **D102**.

	A	B	C	D
1	**Rang** n	a_n	b_n	PGCD(a_n ;b_n)
3	1	5	6	1
4	2	7	11	1
5	3	9	16	1
6	4	11	21	1
7	5	13	26	13
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
102	100	203	501	1

2. On peut conjecturer que le PGCD(a_n ;b_n) =13 si et seulement si n est congru à 5 modulo 13.
3. Pour démontrer l'équivalence « PGCD(a_n ;b_n) =13 si et seulement si n est congru à 5 modulo 13 », on va tout d'abord en démontré un sens puis le sens réciproque.
   - Supposons que n soit congru à 5 modulo 13 c'est-à-dire $n = 13k+5$ avec k un entier naturel.
     On exprime a_n et b_n en fonction de k on obtient
     $a_n = 26k+13 = 13(2k+1)$ et $b_n = 65k+26 = 13(5k+2)$.
     On a $\text{PGCD}(a_n;b_n) = 13 \times \text{PGCD}(2k+1;5k+2)$.
     En remarquant que $5\times(2k+1) - 2\times(5k+2) = 1$ et en appliquant le théorème de Bezout on obtient $\text{PGCD}(2k+1;5k+2) = 1$.
     On en déduit que $\text{PGCD}(a_n;b_n) = 13$.
   - Supposons que $\text{PGCD}(a_n;b_n) = 13$ ce qui implique alors que 13 divise a_n et b_n d'où

$$\begin{cases} 5n+1 \equiv 0\,[13] \\ 2n+3 \equiv 0\,[13] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5n \equiv -1\,[13] \\ 2n \equiv -3\,[13] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\times 5n \equiv -8\,[13] \\ 7\times 2n \equiv -21\,[13] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 40n \equiv -8\,[13] \\ 14n \equiv -21\,[13] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv -8\,[13] \\ n \equiv -21\,[13] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 5\,[13] \\ n \equiv 5\,[13] \end{cases}$$

     On en déduit que n est congru à 5 modulo 13.

Exercice 2

Pour tout n entier naturel, on considère les entiers $a_n = 15n^2 + 13n + 3$ et $b_n = 3n + 2$.

1. À l'aide d'un tableur, calculer le PGCD(a_n ;b_n) pour $0 \leq n \leq 30$.
2. Que peut-on conjecturer ?
3. Démontrer cette conjecture.

Correction

1. On utilise un tableur, OpenCalc de la suite OpenOffice par exemple `http://fr.openoffice.org/`, on réalise la feuille de calculs `http://akbida.free.fr/ressources/epreuve_pratique/sujet029.ods`.
   Dans la cellule **A2** on saisit 0 puis on étire le contenu vers le bas jusqu'à la cellule **A32**.
   Dans la cellule **B2** on saisit **=15*A2^2+13*A2+3** que l'on étire jusqu'à la cellule **B32**.
   Dans la cellule **C2** on saisit **=3*A2+2** que l'on étire jusqu'à la cellule **C32**.
   Dans la cellule **D2** on saisit **=PGCD(B2 ;C2)** que l'on étire jusqu'à la cellule **D32**.

	A	B	C	D
1	**Rang** n	a_n	b_n	PGCD(a_n ;b_n)
2	0	3	2	1
3	1	31	5	1
4	2	89	8	1
5	3	177	11	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
32	30	13893	92	1

2. On peut conjecturer que le PGCD(a_n ;b_n) est égal à 1 c'est-à-dire que les entiers a_n et b_n sont premiers entre eux.
3. Pour démontrer que les entiers a_n et b_n sont premiers entre eux, on peut utiliser la relation de Bezout.
   On cherche à déterminer deux entiers u_n et v_n tels que $u_n \times a_n + v_n \times b_n = 1$.
   On peut adapter la division euclidienne des entiers aux polynômes en n que sont a_n et b_n.
   On obtient alors

$$\begin{array}{r|l} 15n^2+13n+3 & 3n+2 \\ \cline{2-2} -15n^2-10n & 5n+1 \\ \cline{1-1} 3n+3 & \\ -3n-2 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

   On en déduit que $15n^2 + 13n + 2 - (5n+1) \times (3n+2) = 1$ d'où pour tout n entier naurel, les entiers a_n et b_n sont premiers entre eux.