Tangentes à une parabole

Inspiré du sujet 031

Exercice 1

Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ et la droite $\mathscr{D}_m$ d'équation $y = 2x + m$ avec m un réel.

1. Montrer que pour $m \in]-1; +\infty[$, la droite $\mathscr{D}_m$ et la parabole $\mathscr{P}$ ont deux points d'intersection disctincts A et B.
2. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, :
   (a) Tracer la parabole $\mathscr{P}\ :\ y = x^2$.
   (b) Tracer la droite $\mathscr{D}_m$ pour $m \in]-1; +\infty[$.
   (c) Placer A et B les points d'intersection de $\mathscr{D}_m$ et $\mathscr{P}$.
   (d) Soit Δ_A la tangente en A à $\mathscr{P}$ et Δ_B la tangente en A à $\mathscr{P}$
   Tracer Δ_A et Δ_B.
   (e) Placer C le point d'intersection des droites Δ_A et Δ_B.
   (f) Conjecturer le lieu décrit par C lorsque m décrit $]-1; +\infty[$.
3. Démontrer la conjecture émise.

Correction

1. La droite $\mathscr{D}_m$ et la parabole $\mathscr{P}$ ont deux points d'intersection disctincts A et B si et seulement si l'équation $x^2 - 2x - m = 0$ admet deux solutions $\Leftrightarrow \Delta = 4 + 4m > 0 \Leftrightarrow m > -1$
2. À l'aide du logiciel libre Geogebra (`http://www.geogebra.at`), on réalise simplement la figure demandée `http://akbida.free.fr/ressources/epreuve_pratique/sujet031.html`.
   (a) Dans la barre commande on saisit $y = x^2$, puis on renomme la parabole P.
   (b) On crée un *Curseur* $m \in]-1; +\infty[$, avec comme valeur minimale -1 et maximale 10 puis on renomme le curseur m.
   Dans la barre de commande on saisit $y = 2x + m$.
   (c) Dans le menu point on chosit *Intersection entre deux objets*, puis on place A et B les points d'intersection de $\mathscr{D}_m$ et $\mathscr{P}$.
   (d) Pour tracer les tangentes Δ_A et Δ_B on saisit dans la barre de commande :
   Tangente[A,P]
   Tangente[B,P]
   (e) On place C le point d'intersection des droites Δ_A et Δ_B.
   (f) Pour conjecturer le lieu décrit par C lorsque m décrit $]-1; +\infty[$, on active la *Trace* du point C, puis on fait varier à l'aide du curseur la valeur de m.
   Le lieu décrit par C semble être la demi-droite $\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y < 1 \end{array}\right.$.
3. On détermine tout d'abord les coordonnées des points A et B.
   Lorsque que $m \in]-1; +\infty[$ l'équation $x^2 - 2x - m = 0$ admet deux solutions $x_A = 1 + \sqrt{1+m}$ et $x_B = 1 - \sqrt{1+m}$,
   on obtient les odronnées $y_A = 2x_A + m = 2 + m + 2\sqrt{1+m}$ et $y_B = 2x_B + m = 2 + m - 2\sqrt{1+m}$.
   On peut alors déterminer les équations des tangentes à $\mathscr{P}$. La fonction carrée $x :\longmapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $x :\longmapsto 2x$.

On a donc

$$\begin{aligned}\Delta_A :\quad & y = 2x_A(x - x_A) + y_A \\ & y = 2x_A \times x - 2{x_A}^2 + y_A \\ & y = 2x_A \times x - 2{x_A}^2 + {x_A}^2 \\ & y = 2x_A \times x - {x_A}^2 \\ & y = 2(1 + \sqrt{1+m})x - 2 - 2\sqrt{1+m} - m\end{aligned}$$

de même pour Δ_B : $y = 2(1 - \sqrt{1+m})x - 2 + 2\sqrt{1+m} - m$.

Il reste à déterminer les coordonnées de C point d'intersection des droites Δ_A et Δ_B.

Pour cela on résout le système suivant

$$\left\{\begin{array}{l} y = 2(1 + \sqrt{1+m})x - 2 - 2\sqrt{1+m} - m \\ y = 2(1 - \sqrt{1+m})x - 2 + 2\sqrt{1+m} - m \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} y = 2(1 + \sqrt{1+m})x - 2 - 2\sqrt{1+m} - m \\ 0 = 4(\sqrt{1+m})x - 4\sqrt{1+m} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} y = 2(1 + \sqrt{1+m})x - 2 - 2\sqrt{1+m} - m \\ x = 1 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} y = -m \\ x = 1 \end{array}\right.$$

le point C a pour coordonnées $C(1; -m)$, or lorsque m décrit $]-1; +\infty[$ $-m$ décrit $]-\infty; 1[$,donc le lieu décrit par C est la demi-droite $\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y < 1 \end{array}\right.$.