Somme de termes d'une suite

Inspiré du sujet 044

Exercice 1

On pose pour tout n entier non-nul
$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ et $T_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$.

1. À l'aide d'un tableau calculer les termes pour $1 \leq n \leq 30$ de la suite S_n et T_n.
2. Quelle égalité peut-on conjecturer entre S_n et T_n ?
3. En remarquant que S_n est la somme d'une suite arithmétique exprimer S_n en fonction de n.
4. En déduire une conjecture donnant l'expression de T_n en fonction de n. La démontrer par récurrence.

Correction

1. On utilise un tableur, OpenCalc de la suite OpenOffice par exemple `http://fr.openoffice.org/`, on réalise la feuille de calculs `http://akbida.free.fr/ressources/epreuve_pratique/sujet044.ods`.
   Dans la cellule **A2** on saisit 0 puis on étire le contenu vers le bas jusqu'à la cellule **A32**.
   Pour calculer les termes S_n
   dans la cellule **B2** qui correspond à S_1 on saisit 1, puis dans **B3**, on saisit **=B2+A2** que l'on étire jusqu'à la cellule **B32**.
   Pour calculer les termes T_n
   dans la cellule **C2** qui correspond à T_1 on saisit 1, puis dans **C3**, on saisit **=C2+A2ˆ3** que l'on étire jusqu'à la cellule **B32**.

	A	B	C
1	**Rang** n	**Terme** S_n	**Terme** T_n
2	1	1	1
3	2	3	9
4	3	6	36
5	4	10	100
6	5	15	225
7	6	21	441
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
32	30	496	246 016

2. On peut conjecturer que $T_n = S_n^2$.
3. On sait que S_n est la somme de n termes d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 1, on a donc $S_n = \dfrac{(1+n)n}{2}$.
4. D'après ce qui précède on peut conjecturer que $T_n = S_n^2 = \dfrac{(n+1)^2 n^2}{4}$.
5. On veut démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $T_n = \dfrac{(n+1)^2 n^2}{4}$.
   Pour $n = 1$ on a $T_0 = 1$ donc l'égalité est vérifiée pour $n = 1$.
   Supposons que pour un entier n on a $T_n = \dfrac{(n+1)^2 n^2}{4}$,
   pour $n + 1$ on a

$$
\begin{aligned}
T_{n+1} &= \frac{(n+1)^2n^2}{4} + (n+1)^3 \\
T_{n+1} &= \frac{(n+1)^2n^2 + 4(n+1)^3}{4} \\
T_{n+1} &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} \\
T_{n+1} &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} \\
T_{n+1} &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}
\end{aligned}
$$

donc l'égalité est vérifiée pour l'entier $n+1$.

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $T_n = \dfrac{(n+1)^2n^2}{4}$.